

# 电磁学讲义

陈曦

August 4, 2021

## 目录

<b>1</b>	<b>经典物理的框架</b>	<b>3</b>
1.1	牛顿力学	5
1.2	狭义相对论	11
<b>2</b>	<b>场与势</b>	<b>17</b>
2.1	梯度	17
2.2	散度	18
2.3	旋度	21
2.4	保守场	24
2.5	势	25
2.6	保守系统	27
<b>3</b>	<b>相对论协变性</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>电磁学的实验基础</b>	<b>33</b>
4.1	库伦定律	33
4.2	安培定律	36
4.3	法拉第电磁感应	43
4.4	电磁波	45
<b>5</b>	<b>电磁作用的一般模型</b>	<b>47</b>
5.1	场方程	47
5.2	电磁波	53
5.3	运动方程	55
5.4	法拉第电磁感应中的协变性	57

5.5	电磁场的能量 . . . . .	59
<b>6</b>	<b>导体的静电学</b>	<b>61</b>
6.1	电子的流动 . . . . .	62
6.2	热力学平衡态的导体 . . . . .	65
6.3	库伦定律的实验验证 . . . . .	67
<b>7</b>	<b>介电体</b>	<b>69</b>
7.1	多极展开 . . . . .	69
7.2	介电体中的极化 . . . . .	74
7.3	介电体的能量 . . . . .	79
<b>8</b>	<b>磁介质</b>	<b>81</b>
8.1	磁偶极矩 . . . . .	81
8.2	原子的磁偶极矩 . . . . .	84
<b>9</b>	<b>介质中的电磁波</b>	<b>95</b>
<b>10</b>	<b>电路</b>	<b>99</b>

# 1 经典物理的框架

有相当一部分人只有获得了本质的理解才能解除焦虑。因此我们有必要在此暂时脱离具体的知识而搞清楚为什么物理学是现在这个样子。人类用其能够把握和理解的方式观测这个世界。物理学讨论的是这个观测的结果，即世界投射到人类大脑中形成的印象。需要注意的是，这个印象并非世界本身。物理学是人类大脑运用想象力为这个观测结果建立的一个定量的模型，从而达到描述（非解释）这个世界的目的。这个说法容易引起困惑是因为我们经常不自觉地默认了所谓“客观实在性”。而事实上物理学家所讨论的“客观实在”仅在于“可重复性”，即同样的实验会得到同样的结果。“客观实在性”的其他含义不属于物理学的范围。物理学关注的不直接是外部世界而是观测工具观测到的结果及人类大脑为观测结果构建的模型。外部世界与模型之间的映射关系没有理由是唯一的。

定量模型意味着需要使用测量工具对观测进行量化，同时使用数学语言搭建模型。此二者是近代科学的标志性特征。就模型、世界和人这三个方面而言，这个模型需要其自身在逻辑上自洽，普遍地与观测结果高度符合（普适性和精确性），并且足够地简单（大脑喜欢简单的事物）和自然（物理学家的感受）。

经典物理学将世界抽象为由运动着的粒子构成，而粒子间存在符合因果关系的关联（也称相互作用）。至少在不是很微观的场景下，粒子可以被直觉把握。但是粒子间的关联并非为人眼直接所见，只能通过粒子的运动来猜测，因此为模型的构建留下了很大的想象空间。人的日常体验倾向于一种接触式的作用，称为力。因此力的概念也被借用到了模型中来描述相互作用。另两个基本的概念是时间和空间。粒子的运动由粒子的位置随时间的变化来描述。至此为止，时间、空间、力都仅是头脑中的概念，还没有被定义，不能称为可观测量的物理量。物理学中的可观测量都是需要利用指定的观测仪器和方法来定义，称为可操作性定义，而不是一个空虚的概念。测量仪器建立了外部世界与模型的对应关系。没有与外部世界的对应，模型就只是一些变量之间的数学关系。为了测量一个量，物理学采用了一种方便的做法：定义单位。例如，历史上长度的单位米曾经定义为“由铂铱合金（90%的铂和10%的铱）制造的国际米原器在冰的熔点温度时两道刻度之间的距离”。于是空间的量化就变为了计数。没有米原器这样的设定就无从谈起使空间这个概念成为一个可观测量。需要注意的是定义单位不是唯一的方法使得一个概念量化，这只是一个使人觉得很自然的方法（人类有计数的天赋）。使用单位进行计量的基本要素有两点：计数和比较。我们倾向于定义一个基本单位，然后将这个单位进行简单的复制、累加，构成一个有刻度的“尺子”，最后再将刻度与被测体系进行比较得到测量结果。事实上，不存在一个先验的、来源于外部世界的理由使得采用单位和计数的方法进行计量变得必然。一个概念的量化可有很大的任意性，完全可以摆脱基于单位的方法。是人创造了单位这种让人自己觉得很自然的方法，而这个世界其实并不关心你如何去度

量它。即使是采用单位这种方法，不同的单位定义一般会赋予同一个量不同的值，而基于不同单位定义的测量结果之间不必然存在简单的函数关系。总之，是测量方法定义了一个可观测的物理量，没有一个可以脱离具体测量方法的可观测。一个值得注意的事实是测量仪器也是这个世界的一部分。因此，我们为这个世界构建的模型理所当然地也要能够描述测量仪器的行为。更直接地讲，哪些量可以测量、怎么测量需要与模型保持一致。

以一个假想的一维世界为例。粒子在半一维直线 ( $x > 0$ ) 上向  $x$  的正方向运动，且之间没有相互作用。在为这个假想世界构造的模型中，位置  $x$  用米原器测量，但我们还缺少时间的定义。没有一个先验的方法可以告诉我们怎么定义时间。我们需要确定一个测量时间的时钟，从而来定义时间。一个简单的时钟定义为：选取某一个粒子，令时间  $t = x$ ，和位置具有同样的量纲。在这个时钟的定义下，选作时钟的粒子做匀速运动。有了时间和位置的定义，就可以进行实验测量并进而为这个一维世界建立模型。研究表明，每个粒子的运动都可以用  $x = vt + x_0$  这样一个定量的模型很好地描述。每个粒子有自己的常数  $v$  和  $x_0$ 。那个被选作时钟的粒子满足这个方程，并且  $v = 1$ 、 $x_0 = 0$ 。而其他所有粒子也同样做匀速运动。然而，上述时钟的定义方法不是唯一的。我们也可以将时间定义为： $t = \sqrt{x}$ 。再用这个时钟进行实验测量就会发现如下的模型更为合适： $x = at^2 + x_0$ ，每个粒子有自己的常数  $a$  和  $x_0$ 。对于作为时钟的那个粒子， $a = 1$ 、 $x_0 = 0$ 。我们看到，可测量量的定义不是唯一的，采用不同的定义可能会导致不同的模型形式。但是模型一定要和可测量量的定义保持一致。尽管我们有选择的自由，但这个选择需要取得所有观测者的共识，并且我们总是希望这个选择所导致的模型是一个对世界足够简洁的描述。

以上讨论的是物理学与外部世界的关系。下面讨论作为一个知识体系物理学呈现出的层级结构。世界在不同的尺度上会出现独特的现象（其中某些称为演生现象，将在热力学中讨论）。与此相关的物理学描述的是这个尺度上的观测结果，而不同尺度的物理学构成了相互关联的层级结构。处于最基础地位的是量子理论，我们称其具有最大的普适性。在某些情况下（如很多宏观体系），量子理论约化为经典理论。低速条件下，相对论性的经典理论又可约化为牛顿力学。更普适、处于更底层的模型总是可以把之上层级的模型看作它的一部分。例如，牛顿力学可以看作经典理论的低速极限而成为经典理论的一部分。这种层级结构有三点需要说明。第一，牛顿力学的某些概念、测量方法等在更普适的经典理论中仍适用，如惯性系，而另一些概念则在极限下消失；又如量子模型中用的测量工具都是经典的仪器。第二，更普适的经典理论在极限下约化为牛顿力学的过程称为解释。通常我们说物理学（乃至科学）具有解释的功能。但所谓的解释并不是解释这个外部世界。物理学的功能是描述。而解释则发生在模型的不同层级之间，而不是针对外部世界。第三，尽管更底层的模型可以解释上一层级的模型，但每一个层级的模型都应该可以实现自我封闭，即不需要借助更底层的模型中的概念和测量方法。例如，为了牛顿力学的封闭性，时间的测量不能用铯原子钟（来源于量子力学），空间的测量不能用到光速（来源于相对论）。又例如，在量

子力学层次上成立的动量守恒，在经典力学中仍然要独立给出。这有些类似软件，每个版本自成体系，而高版本向下兼容。这种封闭性并非必须，然而我们采用这种方案是因为这样的知识体系更接近历史（更底层的发展得更晚）、更能清晰地体现人类智力演化的进程、更适合教学。

## 1.1 牛顿力学

我们再从头建立一遍牛顿力学。世界由运动着的粒子构成，粒子间有相互作用。我们假定这种相互作用随着距离的增加而趋近于消失。

**定义** 不受到其他粒子相互作用的粒子称为自由粒子。

**定义** 牛顿力学中的空间用米原器定义。

我们作为观测者需要一个参考系来放置实验室，开展实验测量。有了一个参考系作为基准，我们可以通过测量长度和角度来建立一个坐标系，写下空间每一点的坐标，进行空间位置的测量。坐标系可以是任意的，可以是直角坐标也可以是球坐标，甚至是不固定在参考系上，如处理刚体问题时可以选择与刚体一同运动的坐标架。只要能够将空间参量化，如何选择坐标系往往是为了方便。在牛顿力学中，我们选择了一类称为惯性系的特殊参考系作为测量的基准。没有任何先验的理由要求我们必须选择惯性系。最理想的情况下，我们希望所有的参考系都互相等价。但在牛顿力学中我们还无法做到这一点，而是选出了一类特殊的参考系，即惯性系，来作为模型成立的前提。

**定义** 一个参考系中，如果自由粒子均作直线运动，并且若将一个自由粒子的运动规定为匀速则任何其他自由粒子也做匀速运动，那么这个参考系为惯性系。

由于还没有定义时钟，所以并不能根据测量得知一个粒子的运动是否匀速。但当我们选了一个粒子并将其运动规定为匀速，我们也就有了时钟。

**定义** 时间由一个自由粒子度量，其数值正比于位移。

**假设** 存在惯性参考系。任何一个与惯性系相对静止或作匀速直线运动的参考系也是惯性系。

牛顿力学首先假设了惯性系的存在性。在真实的世界中，我们往往会选择一个近似自由的物体作为惯性系，例如一个恒星或一些恒星的集合。该假设还表明惯性参考系有无穷多个。在每个参考系上建一个全同的实验室，就可以方便的比较两个惯性系之间的关系。两个实验室间可以有相对的位移，并且位移随时间呈线性关系，可以有不随时间变化的转动。我们没有理由要求在每个实验室里的观测者看来物理定律都有相同的形式。一般地，每个参考系中的观测者都可以有自己参考系中的物理定律。不同参考系中的定律在形式

上可以不一样。这种情形并不意味着不存在物理学了。我们总可以指定某一个参考系及其观测者作为标准，给出物理定律的一个标准形式。其他观测者给出的定律可以通过变换而得到。我们不能期望所有的观测者都能看到相同的物理定律。但是很幸运，经验表明，我们不是只能选择一个参考系及其观测者作为标准，我们可以有一类（无穷多个）叫惯性系的参考系对于物理定律等价。尽管不是全部的参考系，但有一类无穷多个等价的参考系也已经很好了。这就是所谓的物理定律的协变性。协变性即是有相同的形式。观测者没有办法通过物理定律的形式来区别两个惯性系。这是一个折中的方案，它选取了惯性系这一类参考系，其中的观测者能看到同样的物理定律形式。协变性意味着参考系的等价性，没有哪一个参考系更优越。这是人们对世界的一个很自然的想象。

**假设II** 物理定律在惯性系间满足协变性。

协变性对物理定律的数学形式提出了严格的限制。为了测量时间和空间以及方便进行比较，人们需要在每个实验室里以相同的方式布置时钟和固定坐标架。为了体现协变性，需要给出参考系间可测量量之间的变换关系。惯性系之间的变换可以分解为两部分的组合：转动和平动。现在先只考虑转动。一个物理定律可以由若干方程组成，每个方程又包含若干项。一种简单的做法是按照一个量在转动变换下的行为进行分类，而分类的标准是位置的坐标。为方便，将坐标架取为直角坐标系。如果一个量在转动下保持不变，我们称之为标量，如两点间的距离。如果有三个量在转动下的变换关系与 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个坐标相同，如速度，则把这三个量的组合称为三维空间的矢量。一般地，还可以定义张量。标量为0阶张量，矢量为1阶张量。如果一个方程中的每项都是同阶张量，那么就可以使得在进行参考系变换时方程的形式自动保持不变。由已知的标量和矢量还可以构造出更多的标量和矢量。例如，两个矢量的内积为标量，两个矢量的矢量积为一个新的矢量。在写下物理定律的数学形式时我们通常要求将一个方程的每一项都表达成为同阶的张量，以自动保证转动下的协变性。

现在再考虑平动。我们首先需要得到两个相对做匀速直线运动的惯性系间坐标的变换关系。这个变换不能采用如图1.1所示的方法来得到，是因为 $\vec{r}'$ 和 $\vec{r}$ 不在同一个参考系，它们的坐标由各自参考系中的测量仪器决定，没有理由保证由 $(x, y, z)$ 表示的矢量和由 $(x', y', z')$ 表示的矢量可以简单地按照数学的方式相加。矢量相加的法则只适用于同一个参考系中。

我们需要一个新的假设来得到这个变换关系。

**假设III** 两个事件对一个惯性系的的同时性也意味着在一切惯性系中的同时性。

这个有关同时性的陈述意味着在牛顿力学中时间是绝对的。取直角坐标系， $A$ 与 $A'$ 的坐标轴平行。在 $t = t' = 0$ 时，两坐标系原点重合。 $A'$ 相对 $A$ 的速度沿 $x$ 轴方向，大小为 $v$ 。这时我们只需考虑 $x$ 和 $t$ 两个坐标的变换关系，而 $y = y'$ ， $z = z'$ 。在此我们不准备根据空间的均匀性、各相同性等给出更严

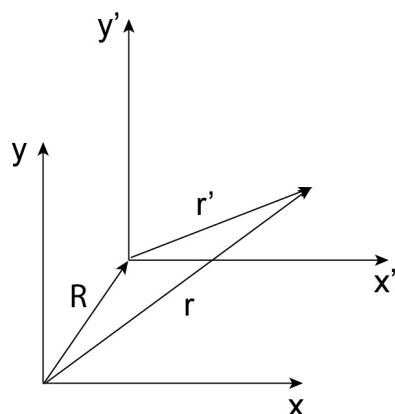


图 1.1: 不可靠的伽利略变换推导

格的推导，而是不加证明地引入一些结论。我们首先认为有如下的线性关系

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(v) & \lambda_{14}(v) \\ \lambda_{41}(v) & \lambda_{44}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

由此可以解出A'到A的变换

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{44}(v)}{\lambda_{11}(v)\lambda_{44}(v) - \lambda_{14}(v)\lambda_{41}(v)} & \frac{-\lambda_{14}(v)}{\lambda_{11}(v)\lambda_{44}(v) - \lambda_{14}(v)\lambda_{41}(v)} \\ \frac{-\lambda_{41}(v)}{\lambda_{11}(v)\lambda_{44}(v) - \lambda_{14}(v)\lambda_{41}(v)} & \frac{\lambda_{11}(v)}{\lambda_{11}(v)\lambda_{44}(v) - \lambda_{14}(v)\lambda_{41}(v)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

还有另一种方法得到A'到A的变换。在A'看来，A以 $-v$ 的速度运动。因此从A'到A的变换可以写为

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(-v) & \lambda_{14}(-v) \\ \lambda_{41}(-v) & \lambda_{44}(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

为了求出 $\lambda(-v)$ ，我们将 $v$ 反向。这时变换的形式仍不变，但 $v$ 、 $x$ 和 $x'$ 都反号，即

$$\begin{pmatrix} -x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(-v) & \lambda_{14}(-v) \\ \lambda_{41}(-v) & \lambda_{44}(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

与1.1式比较，得到

$$\lambda_{11}(-v) = \lambda_{11}(v), \quad \lambda_{14}(-v) = -\lambda_{14}(v), \quad \lambda_{41}(-v) = -\lambda_{41}(v), \quad \lambda_{44}(-v) = \lambda_{44}(v) \quad (1.5)$$

带入到1.3就有了

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(v) & -\lambda_{14}(v) \\ -\lambda_{41}(v) & \lambda_{44}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

将之与1.2比较，得到

$$\lambda_{11} = \frac{\lambda_{44}}{\lambda_{11}\lambda_{44} - \lambda_{14}\lambda_{41}}$$



$$\begin{aligned}\lambda_{14} &= \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{11}\lambda_{44} - \lambda_{14}\lambda_{41}} \\ \lambda_{41} &= \frac{\lambda_{41}}{\lambda_{11}\lambda_{44} - \lambda_{14}\lambda_{41}} \\ \lambda_{44} &= \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{11}\lambda_{44} - \lambda_{14}\lambda_{41}}\end{aligned}\quad (1.7)$$

化简后有

$$\lambda_{11} = \lambda_{44} \quad (1.8)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{44} - \lambda_{14}\lambda_{41} = 1 \quad (1.9)$$

这时四个待定系数减少为两个。进一步， $A'$ 的原点相对 $A$ 沿 $x$ 方向以速度 $v$ 运动，即当 $x = vt$ 时 $x' = 0$ 。所以有

$$\lambda_{11}v + \lambda_{14} = 0 \quad (1.10)$$

以上三式将待定系数减少为了一个，这使得1.1式成为了

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & -v\lambda_{11} \\ \frac{1-\lambda_{11}^2}{v\lambda_{11}} & \lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

下面定出最后一个待定系数 $\lambda_{11}$ 。同时性的绝对性要求 $t = t'$ ，于是 $\lambda_{11} = 1$ 。这样我们就得到了所谓伽利略变换：

$$x' = x - vt \quad (1.12)$$

$$y' = y \quad (1.13)$$

$$z' = z \quad (1.14)$$

$$t' = t \quad (1.15)$$

一般地，

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (1.16)$$

$$t' = t \quad (1.17)$$

由此还可以得到速度变换关系 $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ 。

前三个假设讨论的是参考系。我们现在需要惯性系中粒子的运动方程。于是有了第四个假设。

**假设IV** 在惯性系中观测一个相互作用粒子组成的孤立（无外力）体系，总可以将每一个粒子赋予一个与参考系和相互作用无关的正的常数 $\mu(i)$ ，并有如下性质： $\sum_i \mu(i)\vec{v}(i)$ ， $\vec{v}(i)$ 是速度，对于这个相互作用的粒子系统在任何时刻都有相同的值，而无论粒子间相互作用是什么。

值得注意的是 $\sum_i \mu(i) \vec{v}(i)$ 这个性质满足协变性。我们可以按如下方式定义惯性质量，

**定义** 不失一般性，给定两个粒子0和*i*，在相互作用前后， $\mu(i) \Delta \vec{v}(i) = -\mu(0) \Delta \vec{v}(0)$ 。令粒子0的惯性质量为由铂铱合金制成的千克原器的惯性质量1 kg。于是粒子*i*的惯性质量大小定义为 $m(i) = \frac{\mu(i)}{\mu(0)}$ 。

惯性质量是一个粒子的内禀参量，不依赖于参考系、运动状态和所受到的相互作用。有了惯性质量之后可以定义动量： $\vec{p} = m\vec{v}$ ， $\vec{p}$ 是矢量，并有所谓动量守恒定律：孤立系统动量守恒。

如果粒子间没有相互作用，则每个粒子都会做匀速直线运动。如果存在相互作用，一般地，粒子的速度会随时间改变。为了描述相互作用，我们引入力的概念。

**定义** 力定义为 $\vec{F} = d\vec{p}/dt = m\vec{a}$ ，称为牛顿运动方程。

力的单位是牛顿 (N)， $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ 。

惯性质量用于刻画粒子对于外界相互作用产生的响应。牛顿运动方程中一个粒子对于一个力所产生的响应，即加速度，反比于惯性质量。惯性质量越大，响应越弱。事实上力的定义具有相当的任意性。原则上力可以是 $\vec{p}$ 和*t*的任意函数： $\vec{F} = \vec{F}(\vec{p}, t)$ ，只是这时运动方程和力的表达式通常不再具有简单的形式。有了力的定义后就需要对每一种相互作用通过尝试来写下它的表达式，以使得运动方程能够足够好地描述粒子的轨迹。没有办法能够依靠逻辑先验地给出力的表达式，只能依据观测来尝试可能的形式。例如，牛顿猜测引力是平方反比力，带入牛顿运动方程后给出了开普勒通过实验观测得到的三定律。

以下假设讨论的是自然界中四种相互作用之一的引力。

**假设** V 两个粒子间存在吸引力，称为引力。可以为每个粒子赋予一个描述相互作用强度的参量，称为引力质量。两个粒子间引力作用的大小正比于每个粒子的引力质量，反比于二者之间的距离。力的方向沿两粒子的连线。

引力作用随距离衰减，这为甄别自由粒子创造了条件。引力质量表示的是相互作用的强度，不同于作为粒子内禀参量的惯性质量。内禀特性需要与参考系、运动状态和所受到的相互作用等无关。然而实验表明，一个粒子的惯性质量与引力质量成正比。因此二者只需要建立一套测量方法即可。如果将二者在数值上取作相等，统称质量，则引力大小可以写为：

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (1.18)$$

其中

$$G = 6.6742 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \quad (1.19)$$

如果仅考虑引力作用，以上就是牛顿力学的完整框架。由自由粒子定义时钟往往需要参照遥远的恒星，很不方便。牛顿力学的一个推论是一个外力矩为零的定轴转动刚体的角速度恒定。于是，历史上曾用地球的自转作为更方便的时钟。

引力的表达形式意味着超距作用，粒子间并没有直接接触。这种形式对于人显得不够自然。人最习惯的是直接的接触。使用物理学的语言，我们希望保持所谓局域性 (locality)，即相互的关联仅发生在时空中最近邻处。为此目的，人们发明了场的概念。粒子间通过场作为载体来传递相互作用。一个粒子在其周围建立起场，另外一个粒子感受到场并与之相互作用。核心的想法是将相互作用分为两部分，一部分是场的建立，另一部分是场与粒子的相互作用，而场可以传播。我们不再采用超距作用，相互作用仅存在于紧邻的点之间，保持了局域性。在使用场描述相互作用时需要两个定律，一个是描述场的建立 (场与源的关系)，叫场方程，一个是描述粒子对场的响应，叫运动方程。无论是场与源的关系还是粒子对场的响应，都需要场与粒子之间的耦合常数。

以引力为例，引力质量就是耦合常数。一个质量  $M$  建立的场是 (场方程)

$$\vec{G} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (1.20)$$

运动方程是

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{G} \quad (1.21)$$

场的引入更清晰地表明引力质量描述的是粒子与场的耦合强度，并不是如惯性质量这样的粒子内禀参数。把引力质量也当作内禀参数的一个不自然之处在于无法简单地说明为什么场的产生和场作用于粒子的力这两个看似不同的过程都正比于同一个参数。而无论是粒子建立引力场还是引力场作用于粒子，都是粒子与场的耦合。描述这种耦合可能需要一组参数。牛顿框架下的模型采用了一个最简单的方式，即引入了单一参数，即引力质量，并且场强和力都线性地依赖于这个参数。

对于牛顿引力，场的引入并没有带来多大的方便。但是对于下面要讨论的电磁作用，如果仍然使用超距的力也不是不行，但会极度复杂。而使用场则会使模型变得简单得多，尤其是能够很自然地描述需要传递时间的相互作用。场作为描述相互作用的工具是否具有所谓的“真实性”？事实上，“真实性”完全取决于我们将哪些量归入可测量量，即我们为哪些量规定了具有可操作性的测量方案。我们一般不讨论一个量是否“真实”，而是代之以是否“可测”。

## 1.2 狭义相对论

我们开始讨论狭义相对论。狭义相对论的前两个假设与牛顿力学相同，区别出现在参考系间的变换关系。核心是相互作用的传播需要时间。当一个体系中的一个粒子的状态发生变化时，经过一段时间后另一个粒子才会受到影响。两粒子的距离除以这个时间就是相互作用的传播速度。这个传播速度应该是有限的，存在上限。由此，可以写下相对论的假设。

**假设III** 相互作用的传播速度存在上限。

相互作用不是一个抽象的概念，而是需要一个载体。这个载体需要有一个物理定律来描述。由于惯性系的协变性，这个定律的方程在各惯性系中有相同的形式，因此传播速度上限在各惯性系中相同，是普适的。至于这个普适的速度是什么则是一个实验问题。我们在实验中发现这个传播速度取上限的载体，即真空中电磁波，速度记为 $c$ 。这个速度的一个重要用处是使一个参考系中的时钟同步。只有时钟同步之后时间测量才有意义。相互作用的传播速度存在上限也意味着任何物体的运动速度也必须以此为上限，否则利用该物体作为载体就可以实现一个传播速度超过上限的相互作用。

得到变换关系的所有推导到式1.11为止都与伽利略变换相同。下面根据相对论的假设III定出最后一个待定系数 $\lambda_{11}$ 。首先，当 $v = 0$ 时， $(x, t) = (x', t')$ ，于是 $\lambda_{11}(0) = 1$ 。之后求速度的变换。

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{\frac{1 - \lambda_{11}^2}{v\lambda_{11}^2}u + 1} \quad (1.22)$$

可以证明 $u'$ 是 $u$ 的单调增函数：

$$\frac{du'}{du} = \frac{(v\lambda_{11})^2}{(1 - u\lambda_{11}^2 + v\lambda_{11}^2)^2} > 0 \quad (1.23)$$

将 $u$ 取为普适的相互作用传播速度的上限 $c$ 。如果 $u'$ 不等于 $c$ ，则必须小于 $c$ 。于是 $A'$ 中的最大速度 $c$ 在变换到 $A$ 后一定会大于 $c$ 。这与 $c$ 是普适的速度上限矛盾。因此如果 $u = c$ ，则 $u' = c$ 。这样如果实验中能够发现某个载体的速度在不同惯性系中保持不变，这个载体就是一个可以实现最快传播相互作用的候选者。令

$$c = \frac{c - v}{\frac{1 - \lambda_{11}^2}{v\lambda_{11}^2}c + 1} \quad (1.24)$$

这样

$$\lambda_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad (1.25)$$

由于 $\lambda_{11}(0) = 1$ ，我们最后得到

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.26)$$

由此可见，任何速度 $v$ 不可以大于 $c$ ，否则会导致 $\lambda_{11}$ 为虚数这样一个非物理的结果。这样就自动保证了 $c$ 是速度上限。

为了方便，定义 $\beta = v/c$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ 。洛伦兹变换表示为

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.27)$$

$$y' = y \quad (1.28)$$

$$z' = z \quad (1.29)$$

$$t' = \gamma(t - \beta x/c) \quad (1.30)$$

实验中为了发现相互作用传播速度的上限可以去寻找某个可以承载传递相互作用功能的载体，其速度不依赖于参考系，是一个普适的常数。这样一个载体就是一个可能的选择。如果将这样的速度指定为传播速度的上限，则惯性系间需满足洛伦兹变换。实验发现电磁场具有如此的特征。真空中电磁场以光速 $c$ 传播，不依赖于参考系。有了这样一个恒定的速度就可以更好地定义长度单位米：真空中光在1秒中传播的距离的 $1/299792458$ 。单位的定义总是希望尽可能地普适。相对论向这个方向取得了新的进展：不再需要米原器这样的具体物体。

洛伦兹变换清楚地表明同时性不再具有绝对意义。一个参考系中同时发生的两个事件，在另一个参考系看来可能并不同时。与之相反，绝对时空意味着判断事件的关系有一个统一的、普适的标准。绝对时间的意义是指用唯一的一套时钟就可以测量任意参考系的时间，每一个时刻都可以有一个固定的值而不论该参考系相对时钟有怎样的运动。因此，在任何参考系中测量两个事件的间隔都是相同的，在一个参考系中同时的两个事件在任意参考系中也都是同时的。绝对空间意味着对空间每一点都可以给一个固定的坐标，这个固定的坐标不随参考系而改变。当然一个参考系可以有自己的坐标架，但这种局域的坐标与绝对坐标的差别仅仅是原点。如果坐标轴彼此都平行，则两者的差别为原点的绝对坐标。在相对论中，每个参考系中时间和空间的度量必须由固定在该参考系中的时钟和尺来完成。其中时钟通过光来同步。世界上没有一个统一的、普适的绝对时间和空间。存在绝对时空意味着测量可以独立于参考系进行，而相对意味着测量依赖于参考系。时间的测量需要有与参考系固定在一起的一套同步的时钟来完成，空间的测量需要有与参考系固定在一起的尺子。观测者的作用是：判断、读数和记录。对于一个观测者，他有与其固化在一起的这套时钟，他观察到的一个事件发生的时间就定义为该事件发生处他的时钟的读数。我们发现的规律都是以这样的时间测量为依据的。如果时间和空间只是用来表明事件之间关系，那么这种关系就不是抽象的，而是应该依赖于观测者（参考系）。每个观测者应该有他自己的工具。没有先验的理由要求不同的观测者（参考系）能看到相同的关系，不同参考系可以有不同关系。每个人的立场不同，结论当然会不一样。

洛伦兹变换会导致与伽利略变换不同的速度变换

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad (1.31)$$

$$dy' = dy \quad (1.32)$$

$$dz' = dz \quad (1.33)$$

$$dt' = \gamma(dt - \beta dx/c) \quad (1.34)$$

所以

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \quad (1.35)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \quad (1.36)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \quad (1.37)$$

光速在变换下不变。

牛顿力学框架下的假设IV不具有洛伦兹协变性。此外，在牛顿的时代，人们并不清楚自然界有四种基本相互作用，因此把粒子的运动方程分成了IV和V两个假设。假设IV仅关于惯性质量，而任何有关力的叙述都放在假设V中。这样的好处是每当发现一个新的力时，只要将假设V扩充即可。而一旦我们发现相互作用的类型为有限的几种，并且甚至可以努力尝试将它们统一起来时，一个更好的策略是在一个假设中涵盖完整的运动方程，而不是分为两部分。在经典物理框架下，我们只讨论引力和电磁力。而引力尚不能纳入到狭义相对论中，因此新的假设IV只涉及电磁力。实验表明：

**假设IV** 惯性系中电磁作用的场方程和运动方程由Maxwell方程组和Lorentz力给出。其中惯性质量是粒子的内禀性质并与参考系无关；电荷描述的是粒子与场的耦合强度并与参考系无关。

Maxwell方程组和Lorentz力写作：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.38)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.39)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.40)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.41)$$

$\epsilon_0$ 和 $\mu_0$ 为常数。 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 分别称为电场和磁场， $\rho$ 为电荷密度， $\vec{j}$ 为电流密度。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.42)$$

以上这些方程满足Lorentz协变性（不加证明），即在相对论变换下方程的形式保持不变。电荷 $q$ 和惯性质量 $m$ 具有Lorentz不变性，是个标量。同引力质

量一样，电荷是描述耦合强度的量。经典电磁模型采用了最简单的方案：使用单一的耦合强度量并且场和力都和这个量成线性关系。电荷或荷电粒子是个恰当的名称，因为“荷”具有“外界施加”的意思，有别于内禀参量。

经典电磁理论成立的尺度通常远大于一个微观粒子（如电子、原子核）的线度，因此这些微观粒子可以看作是一个点。于是每一个粒子对于电荷密度的贡献可以用 $\delta$ 函数表示： $\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ 。电流密度： $\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ 。电荷满足如下的连续性方程。一个封闭曲面，包围一个体积。体积内电荷的改变应等于流出曲面的电荷量：

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.43)$$

$$= - \int \nabla \cdot \vec{j} dV \quad (1.44)$$

其中， $\vec{j}$ 为电流密度。所以，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.45)$$

动量 $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ，其中 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。能量定义为

$$E = \gamma mc^2 \quad (1.46)$$

粒子不运动时的能量为 $mc^2$ ，称为静止能量。

质量仍然可以用牛顿力学的方法测量。下面还需要建立电荷的测量方法。电荷受到Lorentz力的作用，而力可以测量。因此可以搭建一个场景，使得人们通过力的测量来定义电荷，具体的方案如下。真空中两根无限长平行直导线，导线截面积可以忽略不计，距离1米。两个导线中通过相同的恒定电流。如果导线每米受力为 $2 \times 10^{-7}$  N，那么电流的大小定义为1 A。A是电流单位安培。然后电荷的单位库伦（C）定义为1A的电流一秒钟流过的电荷量。在这个定义下常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ， $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ， $c = 299792458$  m/s。更近一步，也可以为电场和磁场建立测量方法。于是，Maxwell方程组和Lorentz力中的每个量都成为了可测量量。通过解方程，可以发现Maxwell方程组存在一个波动解，波速就是不依赖于参考系的光速 $c$ 。于是我们就发现了假设II中那个普适的传播速度的上限。

以上的四个假设构成了一套完整的描述电磁作用的方案。四个基本的可测量量是时间、空间、质量、电荷，对于国际单位制中的四个基本单位。电场和磁场作为导出的物理量也是可测量量。电场和磁场传递电磁作用。Helmholtz定理保证了满足Maxwell方程组的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 就可以由电荷分布及其运动状态完全确定下来。在微观尺度上，粒子的运动需要用量子力学描述。即便如此，电磁场仍然可以用经典的方程来得到与实验足够好的符合。场量子化后构成量子电动力学，这时带电粒子和电磁场都被量子化。这是迄今为止人类对自然界所能给出的最准确的描述。

总之，人们已经为世界建立了一套行之有效的物理模型。在这个过程中，人们通过观察和猜测来尝试引入各种量、建立这些量之间的各种关系（基本假设）。我们今天看到的是这些努力的结果。这个结果中的每个细节都经历过反复的探索才存留下来并找到其合适的位置。我们将不会去严格复现这个过程。基于对电磁现象的观测和概念的逐渐抽象，人们最终构造出上述的理论模型来描述电磁相互作用。该模型足够简洁而又极为精确地与各种实验结果相符。在以下若干章中，我们将去理解Maxwell方程组的各个侧面。





## 2 场与势

### 2.1 梯度

对于二维空间的函数 $f(x, y)$ , 当 $x$ 和 $y$ 分别变化时, 函数的变化分别为 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}dy$ 。现在想求 $x, y$ 在某单位矢量 $\hat{u}$ 方向上变化时 $f$ 的变化, 并求出变化最快的方向。单位矢量 $\hat{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j}$ 。其中 $u_x^2 + u_y^2 = 1$ ,  $u_x = \cos\theta$ ,  $u_y = \sin\theta$ 。 $\Delta s$ 是 $\hat{u}$ 方向上的线段, 则 $\Delta x = u_x\Delta s$ ,  $\Delta y = u_y\Delta s$ 。 $f$ 在 $\hat{u}$ 方向上的变化为

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= f(x + u_x\Delta s, y + u_y\Delta s) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}u_x\Delta s + \frac{\partial f}{\partial y}u_y\Delta s\end{aligned}\quad (2.1)$$

于是

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} \simeq \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y\quad (2.2)$$

取极限 $\Delta s \rightarrow 0$

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y\quad (2.3)$$

称为方向导数。定义一个量, 叫梯度 (后面我们会证明这是一个矢量, 于是我们用标量构造了矢量)

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\quad (2.4)$$

则:

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla}f \cdot \hat{u}\quad (2.5)$$

类似, 在三维空间

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\quad (2.6)$$

由于

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla}f \cdot \hat{u} \leq |\vec{\nabla}f|\quad (2.7)$$

我们得到 $df/ds$ 的最大值是 $|\vec{\nabla}f|$ , 发生在 $\hat{u}$ 与 $\vec{\nabla}f$ 有相同方向时。在一点附近, 沿 $\vec{\nabla}f$ 方向函数变化最快。这就是梯度的直观几何意义。

把具有相同函数值的区域连接起来构成等高面 (二维时是等高线)。在等高面上,  $df = 0$ 。所以如果 $\hat{u}$ 与等高面相切, 则 $\vec{\nabla}f \cdot \hat{u} = 0$ 。因而 $\vec{\nabla}f$ 与等高面垂直, 即在垂直等高面的方向上函数变化最快。

$df = \vec{\nabla}f \cdot \hat{u}ds$ , 因而如果  $df > 0$ , 那么  $\hat{u}$  与  $\vec{\nabla}f$  指向相同, 所以  $\vec{\nabla}f$  的指向是从低  $f$  的等高面到高  $f$  的等高面。也就是说  $\vec{\nabla}f$  指向  $f$  增加最快的方向。

在垂直于等高面的方向上

$$|\vec{\nabla}f| \sim \frac{\Delta f}{\Delta s} \quad (2.8)$$

因而等高面越密, 梯度越大。

下面我们说明梯度是矢量

$f$  是一个标量

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (2.9)$$

$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  是矢量, 而  $\Delta f$  是标量, 因而  $\nabla f$  应该是矢量。

## 2.2 散度

考虑空间中的一个矢量场  $\vec{\Lambda}(\vec{r})$ 。一个体积  $V$ , 如图 2.1, 其表面记为  $S$ 。我们想知道  $\vec{\Lambda}$  通过  $S$  的总通量  $\Phi$ 。通量定义为  $\vec{\Lambda}$  对  $S$  的面积分:

$$\Phi = \int_S \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a} \quad (2.10)$$

$d\vec{a}$  是一个无限小的矢量, 它的大小是  $S$  上一个面积元的面积, 方向垂直于面积元向外。通量代表该体积内总的源或漏。例如, 已知速度场  $\vec{v}$  的流体, 单位时间流过面积  $d\vec{a}$  的流量是  $\vec{v} \cdot d\vec{a}$ , 而总流量由上面的积分给出。

下面我们试图将作为通量的面积分与闭合曲面包围的体的内部性质相关联。现在设想我们将  $V$  通过一个隔膜  $D$  分成两部分, 分别记为  $V_1$  和  $V_2$ , 然后分别计算每个体积的面积分。显而易见, 两个面积分之和等于原来整个表面的面积分。

$$\int_{S_1} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a}_1 + \int_{S_2} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a}_2 \quad (2.11)$$

原因是  $D$  上的一个面积元对第一个和第二个积分的贡献大小相等、符号相反。换句话说,  $V_1$  通过  $D$  流出的通量又流入了  $V_2$ , 二者抵消。余下的表面与原来相同。我们还可以对  $V$  继续划分下去。然而无论如何划分, 我们都会有

$$\Phi = \int_S \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[ \frac{\int_{S_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a}_i}{V_i} \right] \quad (2.12)$$

下面我们计算取极限  $N \rightarrow \infty$  下一个体积元  $i$  的面积分与体积的比值。该比值代表该体积内源或漏的平均密度。在  $V_i$  趋于 0 的极限下表示了矢量场  $\vec{\Lambda}$  在该点

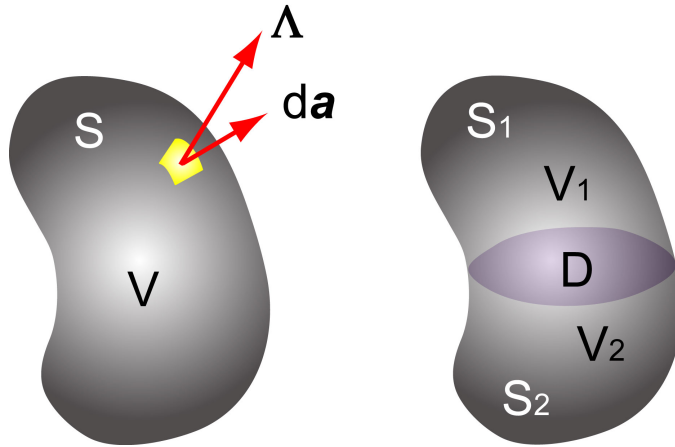


图 2.1: 通量的计算

附近的性质，称为散度，记为  $\text{div}\vec{\Lambda}$ 。

$$\text{div}\vec{\Lambda} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a}_i \quad (2.13)$$

$\text{div}\vec{\Lambda}$  表示的是对于无限小体积元单位体积的通量。如果我们知道了  $\text{div}\vec{\Lambda}$ ，我们就可以反过来得到对于任何体积的通量。

$$\int_S \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div}\vec{\Lambda} dV \quad (2.14)$$

这叫做 Gauss 定理，它给出了通量与源的关系。左边是矢量场的通量。如果通量为 0 就意味着这个体积中没有净的源或漏。  $\text{div}\vec{\Lambda}$  可以看作源或漏的密度。  $\text{div}\vec{\Lambda}$  的体积积分是该体积中总的源或漏。

下面我们计算散度定义中极限。为此，我们需要在直角坐标系中表示  $\text{div}\vec{\Lambda}$ 。我们计算一个长方体（图 2.2）的通量。长方体的中心位于  $(x, y, z)$ ，边长分别为  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。首先计算上下两个面。计算这两个面的通量时只需考虑  $\vec{\Lambda}$  的  $z$  分量。对通量总的贡献依赖于  $\Lambda_z$  在上下表面平均值的差别。对于下表面

$$\begin{aligned} & - \int \Lambda_z \left( x', y', z - \frac{1}{2} \Delta z \right) dx' dy' \\ &= - \int \Lambda_z \left( x + (x' - x), y + (y' - y), z - \frac{1}{2} \Delta z \right) dx' dy' \\ &= - \int \left( \Lambda_z(x, y, z) + (x' - x) \frac{\partial \Lambda_z}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial \Lambda_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \Delta z \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \right) dx' dy' \\ &= - \Lambda_z(x, y, z) \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.15)$$

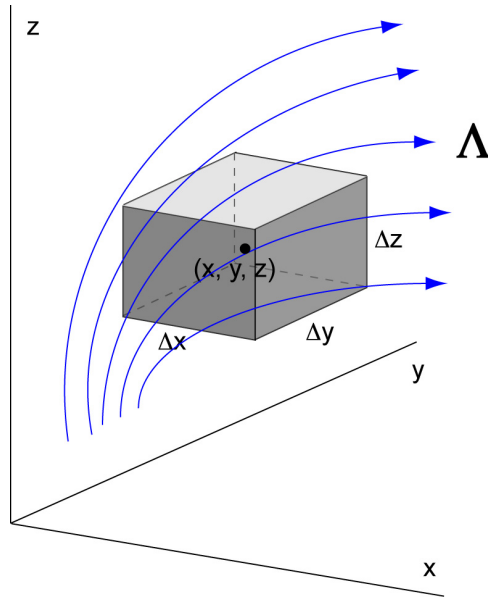


图 2.2: 长方体的通量

类似地，上表面的通量是

$$\begin{aligned} & \int \Lambda_z \left( x', y', z + \frac{1}{2} \Delta z \right) dx' dy' \\ &= \Lambda_z(x, y, z) \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.16)$$

因此上下表面的通量和是

$$\frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.17)$$

类似的做法可以用到其他面上。长方体总的通量是

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{\partial \Lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_y}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

长方体体积为  $\Delta x \Delta y \Delta z$ 。所以通量对体积的比值是  $\partial \Lambda_x / \partial x + \partial \Lambda_y / \partial y + \partial \Lambda_z / \partial z$ 。于是

$$\text{div} \vec{\Lambda} = \frac{\partial \Lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_y}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \quad (2.19)$$

定义梯度算符：

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.20)$$

这是一个矢量算符，即  $\vec{\nabla}$  作用在一个标量函数上得到一个矢量。而

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Lambda}(\vec{r}) = \frac{\partial \Lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_y}{\partial y} + \frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \quad (2.21)$$

于是

$$\operatorname{div} \vec{\Lambda} = \nabla \cdot \vec{\Lambda} \quad (2.22)$$

积分形式

$$\int_S \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{\Lambda} dV \quad (2.23)$$

## 2.3 旋度

一个闭合回路包围着一个曲面。可以将面分成多个小片。类似于散度的讨论

$$\oint \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \oint_{c_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} \quad (2.24)$$

这提示环路积分与面积的比值（见下式）在面积趋于0时的极限应该存在。

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{c_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}}{a_i} \quad (2.25)$$

这个极限应该依赖于面积元的指向  $\hat{n}$ 。 $\hat{n}$  的方向按右手定则确定。

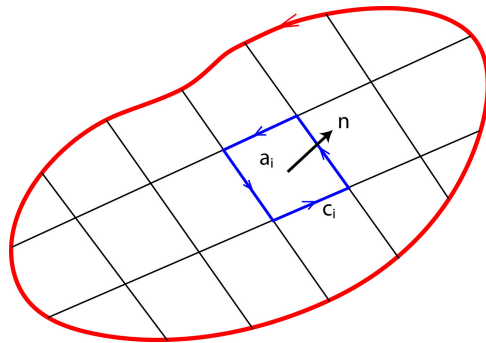


图 2.3: 矢量场对路径的积分

可以定义一个量叫做旋度， $\operatorname{curl} \vec{\Lambda}$ ，它在  $\hat{n}$  上的投影是

$$\operatorname{curl} \vec{\Lambda} \cdot \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{c_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}}{a_i} \quad (2.26)$$

旋度代表环流密度，表示矢量场在空间中旋转的趋势。我们后面将看到旋度是矢量。利用旋度可以得到Stokes定理

$$\oint \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \oint_{c_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\oint_{c_i} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}}{a_i} \\
&= \lim_{a_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N a_i \text{curl} \vec{\Lambda} \cdot \hat{n} \\
&= \int_S \text{curl} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{a} \tag{2.27}
\end{aligned}$$

这样一个矢量对一个回路的积分就表示成为了另一个矢量对该回路张成的任意面的面积分。我们还需要给出一个方便的计算旋度的方法。我们将证明

$$\text{curl} \vec{\Lambda} = \nabla \times \vec{\Lambda} \tag{2.28}$$

其中

$$\nabla \times \vec{\Lambda} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \Lambda_x & \Lambda_y & \Lambda_z \end{vmatrix} \tag{2.29}$$

为证明上面的关系，先取一个正方形面积元（如图2.4）， $\hat{n} = \hat{k}$ ，包围该面积的回路为c，求 $(\text{curl} \vec{\Lambda})_z$ 。

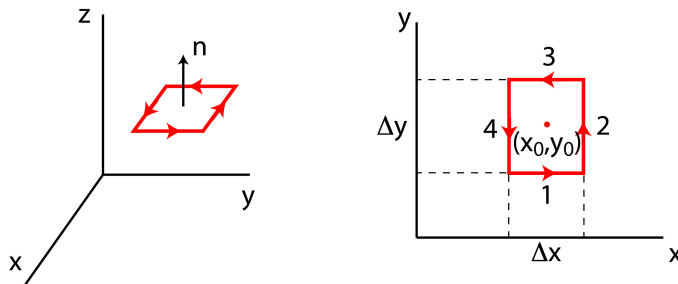


图 2.4: 计算旋度的z分量

$$(\text{curl} \vec{\Lambda})_z = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\oint_c \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}}{a} \tag{2.30}$$

第一段积分

$$\int_1 \Lambda_x(x, y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, z_0) dx \tag{2.31}$$

其中

$$\Lambda_x(x, y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, z_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda_x(x_0 + (x - x_0), y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, z_0) \\
&= \Lambda_x(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Lambda_x(x_0, y_0, z_0) \quad (2.32)
\end{aligned}$$

积分

$$\begin{aligned}
&\int_1 \Lambda_x(x, y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, z_0) dx \\
&= \Lambda_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + 0 - \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Lambda_x(x_0, y_0, z_0) \quad (2.33)
\end{aligned}$$

第三段

$$\begin{aligned}
&\int_3 \Lambda_x(x, y_0 + \frac{1}{2}\Delta y, z_0) dx \\
&= -\Lambda_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Lambda_x(x_0, y_0, z_0) \quad (2.34)
\end{aligned}$$

1+3得到

$$-\Delta x\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Lambda_x(x_0, y_0, z_0) \quad (2.35)$$

类似地, 2+4得到

$$\Delta x\Delta y\frac{\partial}{\partial x}\Lambda_y(x_0, y_0, z_0) \quad (2.36)$$

所以

$$(\text{curl}\vec{\Lambda})_z = \Delta x\Delta y \left( \frac{\partial\Lambda_y}{\partial x} - \frac{\partial\Lambda_x}{\partial y} \right) / \Delta x\Delta y = \frac{\partial\Lambda_y}{\partial x} - \frac{\partial\Lambda_x}{\partial y} \quad (2.37)$$

类似地

$$(\text{curl}\vec{\Lambda})_x = \Delta y\Delta z \left( \frac{\partial\Lambda_z}{\partial y} - \frac{\partial\Lambda_y}{\partial z} \right) / \Delta y\Delta z = \frac{\partial\Lambda_z}{\partial y} - \frac{\partial\Lambda_y}{\partial z} \quad (2.38)$$

$$(\text{curl}\vec{\Lambda})_y = \Delta x\Delta z \left( \frac{\partial\Lambda_x}{\partial z} - \frac{\partial\Lambda_z}{\partial x} \right) / \Delta x\Delta z = \frac{\partial\Lambda_x}{\partial z} - \frac{\partial\Lambda_z}{\partial x} \quad (2.39)$$

所以

$$\text{curl}\vec{\Lambda} = \left( \frac{\partial\Lambda_z}{\partial y} - \frac{\partial\Lambda_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial\Lambda_x}{\partial z} - \frac{\partial\Lambda_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial\Lambda_y}{\partial x} - \frac{\partial\Lambda_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (2.40)$$

回忆 $\vec{\nabla}$ 的定义, 我们有

$$\text{curl}\vec{\Lambda} = \nabla \times \vec{\Lambda} \quad (2.41)$$

于是旋度是一个矢量, 它的方向垂直于环流面。



Stokes定理也可写为

$$\oint \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{\Lambda}) \cdot d\vec{a} \quad (2.42)$$

有了旋度的微分形式就可以方便地计算旋度，例如平方反比力的场

$$\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \left( \partial_y \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{y}{r^3} \right) \hat{i} + \left( \partial_z \frac{x}{r^3} - \partial_x \frac{z}{r^3} \right) \hat{j} + \left( \partial_x \frac{y}{r^3} - \partial_y \frac{x}{r^3} \right) \hat{k} \quad (2.43)$$

其中

$$\partial_y \frac{z}{r^3} = -\frac{3z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3z}{2r^5} \frac{\partial r^2}{\partial y} = -\frac{3yz}{r^5} \quad (2.44)$$

$$\partial_z \frac{y}{r^3} = \frac{3yz}{r^5} \quad (2.45)$$

等等。容易证明平方反比力的旋度为0。

## 2.4 保守场

有这样一种场，它对任何闭合回路的积分都为0，称为保守场。例如引力场

$$\oint \mathcal{G} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.46)$$

$d\vec{r}$ 是沿一路径的积分元。可以很简单地证明

$$\oint -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \oint -G \frac{M}{r^2} dr = 0 \quad (2.47)$$

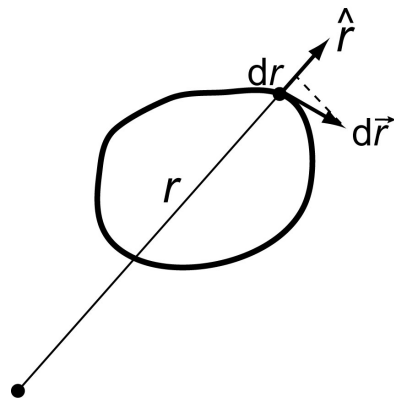


图 2.5: 对引力场的回路积分

一般地,  $\oint \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = 0$ , 如果 $\Lambda$ 是保守场。一个直接推论是:  $\vec{\Lambda} \cdot d\vec{r}$ 的积分只依赖于路径的起点和终点, 而不依赖于路径。如图2.6

$$\int_{A,1}^B \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} + \int_{B,2}^A \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \int_{A,1}^B \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} = \int_{A,2}^B \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} \quad (2.49)$$

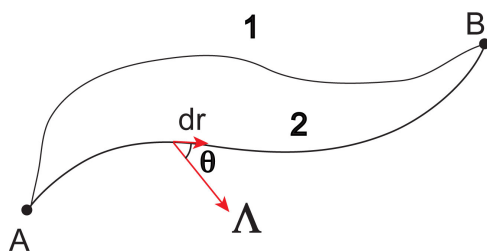


图 2.6: 保守场的积分不依赖于路径

这是保守场的充分必要条件。

我们需要一种更方便的方法判断保守场, 将积分形式用微分形式取代, 将问题转化为只与空间的局域性质有关。一个矢量对任意回路的积分为0就意味着该矢量在每一点的旋度都是0, 反之亦然。于是保守场要求旋度处处为0。保守则无旋。

## 2.5 势

场 $\Lambda$ 本身没有隐含保守性, 那么如何才能自动保证保守性? 由于场的路径积分不依赖于路径, 所以我们可以定义一个函数 $\phi(\vec{r})$ 叫势, 满足

$$\phi(B) - \phi(A) = - \int_A^B \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} \quad (2.50)$$

积分可以选择从A到B的任何路径。我们可以选任何一点作为 $\phi$ 的零点。如果把势作为出发点, 就可以自动保证保守性。

**例: 引力场的势**

取无限远处为0,  $\phi(\infty) = 0$

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \phi(\infty) - \int_{\infty}^r -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\
&= - \int_r^{\infty} \frac{GM}{r^2} dr \\
&= \frac{GM}{r} \Big|_r^{\infty} = -\frac{GM}{r}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

利用积分可以从场得到势。那么如何从势得到场？考虑邻近两点间势的差别

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \phi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) \\
&= - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \Delta\vec{r}} \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} \\
&= -\vec{\Lambda} \cdot \Delta\vec{r} \\
&= -(\Lambda_x \Delta x + \Lambda_y \Delta y + \Lambda_z \Delta z)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

同时我们还知道

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \Delta z \tag{2.53}$$

所以  $\vec{\Lambda} = -\vec{\nabla}\phi$ 。我们可以用梯度从势得到场。利用上一章梯度的性质，我们有

- 场垂直于等势面
- 场从势高的地方指向势低的地方
- 场的方向是势变化最快的方向
- 等势面越近场越强

$\vec{\Lambda}$ 和 $\phi$ 可以相互推出，但 $\phi$ 更方便，因为 $\phi$ 的存在已经隐含了 $\vec{\Lambda}$ 是保守场。势自动体现了保守性。容易证明 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$ 。

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi))_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \phi - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \phi = 0 \tag{2.54}$$

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi))_y = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \phi = 0 \tag{2.55}$$

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi))_z = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \phi - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \phi = 0 \tag{2.56}$$

## 2.6 保守系统

上面以引力场为例讨论了场方程，下面讨论运动方程。

运动方程

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \alpha \vec{\Lambda} \quad (2.57)$$

我们希望将 $\vec{\Lambda}$ 换成更基本的 $\phi$ 。运动方程两边对一路径积分

$$\int_A^B m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{r} = \alpha \int_A^B \vec{\Lambda} \cdot d\vec{r} \quad (2.58)$$

$$\int_A^B m \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = -\alpha (\phi(B) - \phi(A)) \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{1}{2} \int_A^B m \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dt \\ &= \frac{m}{2} \int_A^B d \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\alpha (\phi(B) - \phi(A)) \quad (2.61)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + \alpha \phi(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \alpha \phi(B) \quad (2.62)$$

能量定义为 $E = T + U$ ，其中 $T = \frac{1}{2} m v^2$ 叫动能， $U = \alpha \phi$ 叫势能。在保守场中，如果采用运动方程中的方式将运动与场耦合，则可以定义一个函数称为能量，并且能量守恒。这样的系统称为保守系统。牛顿运动方程可以描述所有的事情而不必引入能量。能量的出现本质上是用场和势来描述相互作用的必然结果。

保守场导致了保守系统。但保守系统不一定要基于保守场。例如，考虑了全部的电磁效应（非静电）后，电场和磁场不再是保守场。但仍然可以引入势并将Maxwell方程组等效地写为：

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 \quad (2.63)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.64)$$

其中 $c$ 是光速。 $\vec{A}$ 和 $\phi$ 称为矢量势和标量势，与电场和磁场的关系是 $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ 和 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，这并不能保证保守场。历史上，势的引入可自动保证某些场的保守性，但势最本质的重要性在于它能彻底地保证相互作用的局域性，而场不能，例如AB效应。

尽管电磁场不再是保守场，但我们可以通过定义场的能量使得场与粒子一起构成的体系的总能量守恒。一般地，基于电磁作用的系统是保守系统。

### 3 相对论协变性

在洛伦兹变换中，时间和空间的变换不再独立。为此我们需要一般的数学结构，使得时间和空间共同构成四维矢量，并用更一般的代数语言来叙述狭义相对论，讨论相对论协变性。将四维时空的坐标记为 $(x_0 = ct, x, y, z)$ 。于是，洛伦兹变换写为

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

记为 $x' = Lx$ ，其中 $L$ 为洛伦兹变换的 $4 \times 4$ 矩阵。 $L$ 的逆矩阵为

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

在四维时空中，上式构成了最基本的变换关系，更完整的变换还需要考虑转动等。一个在四维时空变换下保持不变的量称为四维标量。如果有四个量 $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ ，它们之间的变换关系与上式相同，则 $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ 构成了一个四维矢量，例如 $(E, c\vec{p})$ 。将矢量和标量进行运算还可以构造出更多的矢量或标量。例如定义4-速度

$$U = (cdt, d\vec{r})/d\tau = \gamma(c, \vec{u}) \quad (3.3)$$

其中 $\tau$ 是原时， $d\tau$ 是标量， $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 。 $U$ 是一个四维矢量。

由四维矢量 $(E, c\vec{p})$ 定义四维矢量Minkowski力

$$K = \frac{1}{c} \left( \frac{dE}{d\tau}, c \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \left( \frac{dt}{d\tau} \right) \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \gamma \vec{F} \right) \quad (3.4)$$

令 $\rho_0 = dq/dV_0$ ， $dV_0$ 是使电荷 $dq$ 静止的参考系中体积元的体积。

$$dV = dV_0/\gamma \quad (3.5)$$

由于电荷是一个标量，因此 $\rho_0$ 是个标量场。 $\rho_0$ 和 $U$ 可以构造出一个矢量场：

$$J = \rho_0 U = \frac{dq}{dV_0} \gamma(c, \vec{u}) = \frac{dq}{dV} (c, \vec{u}) = (c\rho, \vec{j}) \quad (3.6)$$

于是 $(c\rho, \vec{j})$ 构成了一个四维矢量场。

还可以用两个矢量的内积得到一个标量。在三维空间中，两个矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的内积定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^T b = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.7)$$

内积对于转动变换 $\Lambda$ 保持不变，是一个标量。 $\Lambda$ 是一个 $3 \times 3$ 正交矩阵，即 $\Lambda^T \Lambda = I$ ， $I$ 是单位矩阵。一般地，内积有如下定义

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$g$ 称为度规矩阵。类似于三维空间，在四维时空的代数结构中也可以引入内积运算。对于狭义相对论的平直时空，度规矩阵取为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

于是两个四维矢量 $A$ 和 $B$ 的内积为

$$A \cdot B = A^T g B = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \quad (3.10)$$

这样定义的内积是一个标量： $A' \cdot B' = (LA)^T g (LB) = A^T L^T g LB$ ，容易验证 $L^T g L = g$ ，因此 $A' \cdot B' = A \cdot B$ 。

取 $A = B = x$ ，则四维时空坐标的长度 $c\tau$ 为

$$(c\tau)^2 = x \cdot x = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.11)$$

取 $A = B = U$ ，有 $U \cdot U = c^2$ ，为一标量。

取 $A = B = (E, c\vec{p})$ ，有 $E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$ ，为一标量。

设 $\phi(x)$ 为四维时空中的一个标量场。容易证明它的偏微分

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\nabla \phi \right) \quad (3.12)$$

构成了一个四维矢量。由此可以将 $(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ 看做是一个矢量算符。它作用到一个标量场上得到一个矢量。这个算符与一个矢量场 $(A_0, \vec{A})$ 的内积为

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \quad (3.13)$$

是一个标量场。而其与自身的内积

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.14)$$

可以看做是一个标量算符。

一个物理定律需要写成相对论协变的形式，例如

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = \psi \quad (3.15)$$

其中 $A = (A_0, \vec{A})$ 是一个矢量场， $\psi$ 是一个标量场。令 $A = J$ 和 $\psi = 0$ ，得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.16)$$

这就是电荷连续性方程。我们发现它具有相对论协变性。又如满足相对论协变性的方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \psi \quad (3.17)$$

以及

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} - \nabla^2 A_0 = J_0 \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (3.19)$$

其中 $J = (J_0, \vec{J})$ 是矢量场。





## 4 电磁学的实验基础

我们已经回顾了经典物理学的框架。在现代物理学中，人们经常从一些基本的原则（如相对论协变性、对称性等等）出发来建立模型，然后根据模型预言与实验事实的符合程度来甄别出最优的模型。我们打算采用相同的方式来构建电磁学。到十九世纪为止，人们已经就静电力、磁性、电磁感应、电磁波积累了大量事实和知识，并发现这些现象彼此关联，进而试图建立一个统一的模型。在本章中，我们将讨论这些实验基础。

### 4.1 库伦定律

人们首先需要为物质结构建立一个模型。一个最简单的方案是物质由点电荷构成。点电荷的大小远远小于我们所关心的尺度。这个模型的合理性被近代物理的发展所确认。库伦等人在十八世纪做过很多宏观尺度上的实验研究，主要是测量荷电体之间的相互作用力。电荷来源于摩擦起电。结果发现如果假设静止点电荷间相互作用力随距离遵循平方反比关系且同号电荷相斥、异号相吸，即

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{k_e Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (4.1)$$

就可以很好地得到和实验符合的预言。

为了体现局域性，定义电场  $\vec{E} = \vec{F}/q$ ，一个静止点电荷的电场为

$$\vec{E} = \frac{k_e Q}{r^2} \hat{r} \quad (4.2)$$

$k_e$ 是个普适的常数，其大小依赖于对电荷单位的规定。在电场中，一个电荷  $q$  受到的力是

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (4.3)$$

电场可以叠加。在处理多电荷体系时，一个位置的电场是各个电荷贡献之和，但这种做法不很方便，因此人们又发展了电场的微分方程形式。首先需要从电场的通量入手。电场对于一个闭合曲面的通量定义为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (4.4)$$

以点电荷为原点建立坐标系，如图4.1

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint \frac{k_e Q}{r^2} \cos \theta da = \oint k_e Q d\Omega = 4\pi k_e Q \quad (4.5)$$

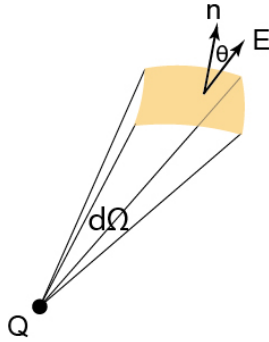


图 4.1:

$\Omega$ 是立体角。由于场可以叠加，上式对于多电荷体系仍然成立，而 $Q$ 则是闭合曲面包围的体积中的总电荷。用电荷密度表示

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi k_e \int \rho(\vec{r}) dV \quad (4.6)$$

利用高斯定理，上式可写为

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = 4\pi k_e \int \rho(\vec{r}) dV \quad (4.7)$$

为了使该式普遍成立，必然有

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi k_e \rho \quad (4.8)$$

这个微分形式很好地体现局域性：场在一点的散度只和这一点的电荷密度有关。为了表明该式与库伦定律等价，还需要证明它可以得到4.2式。取一个以点电荷 $Q$ 为球心、半径为 $r$ 的球面进行面积分，

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi k_e Q \quad (4.9)$$

一个静止的点电荷具有球对称性，因此电场方向只能沿径向，于是

$$4\pi r^2 E = 4\pi k_e Q \quad (4.10)$$

从而得到库伦定律。如果电荷运动，那么速度就提供了一个特殊的方向，系统不再具有球对称性，也就不能得到库伦定律了。

静电场为保守场，即 $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，可以定义标量势 $\phi(\vec{r})$ ，使得

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (4.11)$$

由 $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi k_e \rho$ ，得到 $\phi$ 满足的方程

$$\nabla^2 \phi = -4\pi k_e \rho \quad (4.12)$$

称为泊松方程。由标量势的可叠加性可得到该方程的解为

$$\phi(\vec{r}) = 4\pi k_e \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.13)$$

对于一个点电荷体系总的静电能定义为把这些电荷从无限远处移到当前位置所做的功，容易证明

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{r}_i) \quad (4.16)$$

$\phi(\vec{r}_i)$ 是除第*i*个电荷外其它所有电荷产生的势。

4.16式的成立需要如下的点电荷条件：一、电荷的线度比电荷之间的距离小得多，因此在一个电荷的范围内其他电荷产生的势可以看作是均匀的；二、一个电荷内部的电荷分布不随时间或外场而改变（刚性）。例如，很多情况下一个电子可以看作点电荷。

4.16式仅仅是点电荷之间的相互作用能，并没有包括形成每一个点电荷需要的能量。为了得到总能量，需要假设电荷无限可分，而总能量可以认为是将无限小的电荷组装起来需要做的功。假设最终达到的电荷密度和电势为 $\rho(\vec{r})$ 和 $\phi(\vec{r})$ 。由于电势与电荷的线性关系，在组装过程中，当电荷密度达到 $\lambda\rho$ 时，电势应为 $\lambda\phi$ 。这时，将一份无限小电荷（ $\lambda$ 到 $\lambda + \delta\lambda$ ）移入需要的功是 $\delta\lambda\rho \cdot \lambda\phi = \lambda\delta\lambda\rho\phi$ 。对 $\lambda$ 从0积到1得到总能量为

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\phi dV \quad (4.17)$$

由 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ 和 $\vec{E} = -\nabla\phi$ 得到

$$\rho\phi = \phi\epsilon_0\nabla \cdot \vec{E} \quad (4.18)$$

$$= \epsilon_0(\nabla \cdot (\phi\vec{E}) - \vec{E} \cdot \nabla\phi) \quad (4.19)$$

$$= \epsilon_0(\nabla \cdot (\phi\vec{E}) + E^2) \quad (4.20)$$

一个静电荷体系的 $\phi\vec{E}$ 在远处以 $\sim 1/r^3$ 的方式衰减，因此上式中的第一项利用高斯定理变为无限远处曲面的面积分后等于零。于是得到总的静电能

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 dV \quad (4.21)$$

$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 可被视为能量密度。4.21式中的能量恒正，这与4.16式不同。例如，两个大小相等、符号相反的点电荷，4.16式给出的相互作用能 $\frac{q_1 q_2}{r_{ij}}$ 为负。差异产生的原因是4.16式为点电荷之间的相互作用能，而并没有包括形成每个点电荷需要的称为自能的能量。自能也是总的相互作用能的一部分，只是它仅属于一个点电荷。4.21式有两个相互关联的问题：其一、电荷有基本单元，例如对一个电子我们并不能真正在物理上做到无限小的拆分来得到它的自能；其二、如果将电荷看作一个不可拆分的几何的点，在对 $E^2$ 进行积分时会碰到发散（在 $r \sim 0$ 时， $\int E^2 dV \sim \int 1/r^2 dr$ ）。在经典物理中，一个简单的解决方案是为点电荷建立模型。例如，假设电子为一小球，半径为 $R$ ，其电荷无限可分，密度均匀。则电子的自能为 $\frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ 。虽然自能依赖于模型，但在点电荷条件下，自能部分始终是一个固定的常数，不会随时间和周围电磁环境而改变。因此在经典物理尺度上相当多的场合中，可观测的效应不依赖于点电荷的模型细节。

4.21式赋予了场更多的现实意义。对于静止电荷的情形，能量可以写成仅依赖于各电荷位置的库伦势。当有更复杂的电磁作用参与时，能量函数通常无法写成各个粒子的坐标及其对时间微分的一个简单形式。这时将能量的一部分用场来表达就更具有现实意义。系统的总能量可以简单地表示为粒子动能加上场能量两部分之和，而每一部分的形式都很简洁。在一些特殊的约定下，从场能量的表达式中也可以分离出一部分归入粒子，使得物理更直观。例如，在非相对论近似和所谓库伦规范下，场能量可以分解为简单的库伦势项和横向辐射场项之和，然后再把库伦势看做势能而归入到粒子的能量中，这样看上去系统就由受超距库伦静电作用的电子和辐射场组成。这样处理往往会带来一些方便。总之，引入场这个工具虽然使得系统的自由度增加了，但同时又能够使得理论的形式和概念变得简单。这对进一步的量子化尤其重要。

## 4.2 安培定律

磁性有很长的研究历史，但都基于天然的磁铁。这时磁与电看上去是两种完全不同的现象。1820年，奥斯特的实验表明一根载有电流的导线可以与磁铁发生相互作用，预示着电与磁有着某种关联。更进一步实验表明，两根载流导线间的相互作用力、一根载流导线与磁铁间的相互作用力、以及两个磁铁之间的相互作用力都具有相同的性质。这清楚地表明了磁与电具有相同的来源，而磁与电荷的流动密切相关。电流可以产生于连接两块导体的导线中，这两块导体上的电荷来源于摩擦起电。但是此时电流会很快衰减到零，并且没有很好的办法计量单位时间内流过导线的电荷量。事实上一个可以想象的计量方法是测量两端导体的质量变化。但这种方法并没有真正用于测量，我们现在知道原因在于用于载流的电子的质量很小。历史上，真正用于产生稳恒电流的方法是使用伏打电池。同时发展的是人们对物质结构，尤其是原子理论，的理解。伏打电池将铜和锌分别浸在硫酸铜和硫酸锌溶液中。

铜和锌两个电极间会产生稳恒的电流（可以用奥斯特实验验证）。单位时间内通过的电荷定义为电流，可以用电解的量（质量）来计量。从而也可以定量地计量电荷。伏打电池是一个关键环节，否则我们根本无从知道库伦实验中的电荷与下面讨论的安培实验中的电流有什么样的关系。

安培等人进行了更量化的实验。用现代的方式表达，一个稳恒电流体系可以产生磁场

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' \quad (4.22)$$

$\vec{j}$ 是电流密度。 $k_m$ 是一个常数。对于一个局域的电流体系，在远处静磁场以 $1/r^2$ 的速度衰减。处于这个磁场中另一个电流体系受到的力是

$$\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.23)$$

由于我们当前关注的是微观模型，因此上两式都用的是电流密度。

可以把这个普遍的公式应用于一个闭合的电流回路上，电流为 $I$ 。体积元 $d\vec{r}' = dS' d\vec{l}'$ ，其中 $dS'$ 为垂直于电流线的面积元， $d\vec{l}'$ 沿电流线方向。

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' \quad (4.24)$$

$$= k_m \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' d\vec{l}' \quad (4.25)$$

$(\int \vec{j} dS') d\vec{l}' = I d\vec{l}'$ ，所以

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_m I \oint d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.26)$$

称为Biot-Savart定律，针对的是一个闭合的电流回路。积分需要对这个完整的回路进行，才能得到正确的磁场。事实上，写成如下的微分形式可能不是一个妥当的做法： $d\vec{B} = k_m I d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ ，因为在总的 $\vec{B}$ 中在物理上并不好指认每个部分的贡献。上述的Biot-Savart定律的形式也不是唯一能得到正确的 $\vec{B}$ 的公式。叠加上任何一个对回路积分为0的项都能给出同样的 $\vec{B}$ 。此外Biot-Savart定律必须用于稳恒电流的情形。

事实上，实验中使用的都是宏观的电流回路，因此Biot-Savart定律是直接可以同实验进行比较的形式。我们已经发现微观模型意味着这种宏观形式成立，但反之却不一定，因为宏观形式是由微观模型的平均得到。在平均过程中，很多信息已经失去。而在微观上，电子的运动非常无序。尽管如此，人们发现从宏观实验得到的Biot-Savart定律出发进行猜测得到的微观模型却是普遍成立的。

为了更直接地体现局域性，我们需要写下 $\vec{B}$ 满足的微分方程。根据Helmholtz定理，需要写下散度和旋度方程以保证 $\vec{B}$ 可以完全由电流分布确定下来。直接对 $\vec{B}$ 的表达式计算表明

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} = 4\pi k_m \vec{j} \quad (4.28)$$

为了方便讨论问题，还可以写下以上两方程对应的积分形式：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.29)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k_m I \text{ (安培定律)} \quad (4.30)$$

对于一个点电荷，它感受到的力是

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.31)$$

在处理电场问题时，由于电场的散度等于零，因而引入了电势，使得电场的方程变为了一个，即 $\nabla^2\phi = -4\pi k_e\rho$ 。类似于电场，可以定义一个矢量势 $\vec{A}$ ：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.32)$$

这可以自动保证 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，因为 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ 恒为0。反之， $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 也意味着存在 $\vec{A}$ ，使得 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 。但此时 $\vec{A}$ 并不唯一，即可以有多个 $\vec{A}$ 对应同样的 $\vec{B}$ 。为了使 $\vec{A}$ 唯一确定（在相差一个常数的意义上），我们还规定 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 。有了旋度和散度后一个矢量就可以唯一确定了（除一个常数外）。之所以可以这样做的原因是如果 $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ ，令 $f = \nabla \cdot \vec{A}$ 。总存在这样一个函数 $\vec{g}$ ，使得 $\nabla \cdot \vec{g} = f$ 并且 $\nabla \times \vec{g} = 0$ ，这是因为这样的 $\vec{g}$ 类似于由电荷密度 $f$ 产生的静电场。所以，从 $f$ 出发就可以找到 $\vec{g}$ 。再做如下变换： $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{g}$ 。于是新的 $\vec{A}$ 满足 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，并且 $\nabla \times \vec{A}$ 仍等于 $\vec{B}$ ，因为 $\nabla \times \vec{g} = 0$ 。

一个有用的关系是

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \quad (\text{磁通量}) \quad (4.33)$$

将 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 代入到 $\nabla \times \vec{B} = 4\pi k_m \vec{j}$ 得到 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 4\pi k_m \vec{j}$ 。再利用 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (4.34)$$

$$= -\nabla^2 \vec{A} \quad (4.35)$$

$$= 4\pi k_m \vec{j} \quad (4.36)$$

得到

$$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi k_m \vec{j} \quad (4.37)$$

这样  $\vec{A}$  的每一个分量都构成一个泊松方程，其解在静电学中已经给出。当  $\vec{j}$  为局域的电分布时（即无限远处  $\vec{j} \rightarrow 0$ ），有

$$\vec{A}(\vec{r}) = k_m \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.38)$$

同静电学一样，引入了势可以使模型在形式上更为简洁，尽管在物理上是等价的。另外，因为没有了矢量积，上式使得磁场的计算更为方便、直观。以下看一个例子。

例

无限长直导线，电流为  $I$ 。沿导线方向取为  $z$ 。电流只有  $z$  分量，因此  $\vec{A} = A\hat{z}$ 。

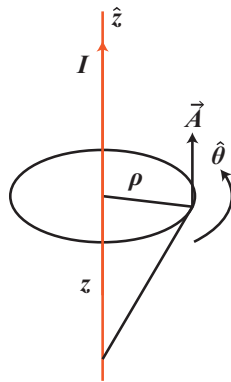


图 4.2:

$$A = k_m I \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \quad (4.39)$$

对于无限长导线上式的积分发散，因此此时  $\vec{A}$  的积分计算公式已经不适用。取有限长度  $(-l, l)$ ，且  $l \gg \rho$

$$A = k_m I \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \quad (4.40)$$

$$= 2k_m I \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \quad (4.41)$$

$$= 2k_m I \ln(z + \sqrt{z^2 + \rho^2}) \Big|_0^l \quad (4.42)$$



$$= -2k_m I \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (4.43)$$

这里用到了  $l \gg \rho$  时,  $\sqrt{l^2 + \rho^2} \sim l$ 。由此容易得到

$$\vec{B} = B\hat{\theta} = (\nabla \times \vec{A})_{\theta}\hat{\theta} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\theta} = \frac{2k_m I}{\rho}\hat{\theta} \quad (4.44)$$

这样我们可以得到两条间距为  $d$  的平行电流线单位长度上的受力为

$$F = \frac{2k_m I_1 I_2}{d} \quad (4.45)$$

力是一个方便测量的量。因此人们可以用上式来定义电流的单位。将电流的单位称作安培 (A)。首先将常数  $k_m$  定为  $10^{-7} \text{ N/A}^{-2}$ 。在真空中两根无限长平行直导线, 导线截面积可以忽略不计, 距离1米。两个导线中通过相同的恒定电流。如果导线每米受力为  $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ , 那么电流的大小定义为1 A。有了电流的定义, 就可以进一步定义电荷。电荷的单位一库伦 (1 C) 定义为1 A的电流一秒钟流过的电荷量。在这个定义下通过实验可以确定常数  $k_e$ 。由于历史原因, 通常将  $k_e$  记为  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$ , 而  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ 。同时将  $k_m$  记为  $\mu_0/4\pi$ , 而  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^{-2}$ 。在这样的约定下, 静电场和静磁场满足的方程写作

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.46)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (4.47)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.48)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (4.49)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.50)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (4.51)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.52)$$

一个电荷受到的力是

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.53)$$

再看一个求磁场的例子: 载流圆环轴线上的磁场。由于对称性, 积分时只需取  $z$  分量

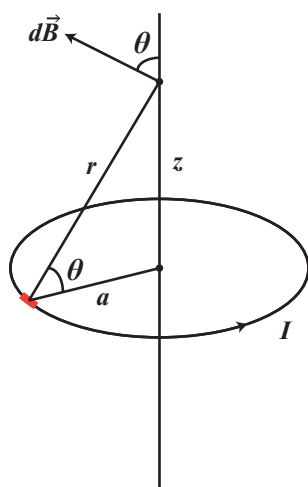


图 4.3:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint dl \frac{a}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.54)$$

在圆心处  $z = 0$ ,  $B_z = \frac{\mu_0 I}{2a}$

无限长螺线管轴线上的磁场可以看做无限多圆环的贡献,  $dz$ 长度上的电流为  $nI dz$ ,  $n$ 为单位长度上的匝数。

$$B_z = \int \frac{nI dz \mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.55)$$

$$= \frac{nI \mu_0 a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.56)$$

$$= \mu_0 n I \quad (4.57)$$

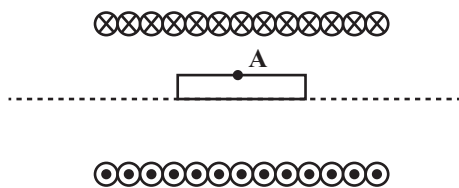


图 4.4:

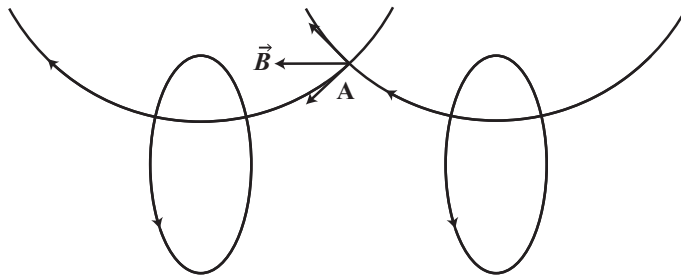


图 4.5:

我们将发现不仅是轴线上，而且螺线管内各处磁场相等，螺线管内磁场均匀。如图，螺线管内任何一点A，它的磁场来源于左右两边对称分布的电流环。对称的电流环对A点磁场的贡献只有轴向分量。由此可知管内的磁场方向处处沿轴向。取图中所示的一个回路。由于回路中没有电流流过，回路上下两边对磁场的积分应该相互抵消才能保证回路积分为零。由此得知管内磁场必然均匀，并为 $\mu_0 n I$ 。类似的讨论适用于管外。管外磁场也需沿轴向。取下图中的回路。回路下边的积分为 $\mu_0 n I l$ ，正好等于回路中的总电流 $\times \mu_0$ 。因此上边的积分必须为0，即 $B = 0$ 。螺线管外部磁场为零，均匀的磁力线都被约束在螺线管内。

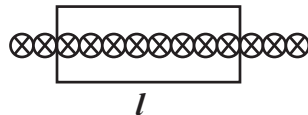


图 4.6:

再来看矢量势。无限长螺线管同样会有发散的问题，需要取一有限长度。这个有限长螺线管平行于 $z$ 方向，并关于 $z = 0$ 平面对称。以下讨论不限于管内或管外。取柱坐标，一般地， $\vec{A} = A_\theta \hat{\theta} + A_\rho \hat{\rho} + A_z \hat{z}$ 。如果螺线管足够长，则在 $z = 0$ 平面附近沿 $z$ 方向仍有很好的平移对称性，这使得 $\vec{A}$ 不是 $z$ 的函数。绕轴的旋转对称性使得 $\vec{A}$ 也不是 $\theta$ 的函数。电流没有 $z$ 分量，于是 $A_z = 0$ 。因此， $\vec{A} = A_\theta(\rho) \hat{\theta} + A_\rho(\rho) \hat{\rho}$ 。如下图，A和B两个点关于OP对称。两处的电流对P点的贡献沿径向方向抵消，因此P点的 $\vec{A}$ 只有 $\hat{\theta}$ 方向的分量。于是， $\vec{A} = A(\rho) \hat{\theta}$ 。矢量势形成围绕轴心的同心圆，方向与圆相切，大小只依赖于到轴心的距离。

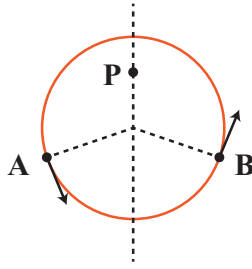


图 4.7:

$A(\rho)$ 可以用如下方法得到

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \quad (\text{磁通量}) \quad (4.58)$$

将积分回路取成与螺线管同心的圆,

$$\text{上式左边} = A(\rho) \cdot 2\pi\rho \quad (4.59)$$

$$\text{右边} = \begin{cases} \mu_0 n I \cdot \pi \rho^2 & \text{管内} \\ \mu_0 n I \cdot \pi a^2 & \text{管外} \end{cases} \quad (4.60)$$

$$(4.61)$$

$a$ 为螺线管半径。所以

$$A(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 n I \rho, & \rho < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{a^2}{\rho}, & \rho > a \end{cases} \quad (4.62)$$

$$(4.63)$$

需要注意的是尽管 $B$ 在管外为零,但 $A$ 并不为零。这在量子力学中有重要后果。基于势写下的电磁学可以避免非局域的相互作用,这是一个极大的优点,使得描述更为简洁、自然和方便。

### 4.3 法拉第电磁感应

奥斯特、安培等人发现了电流的磁效应,从而推动了将电和磁统一起来想法。更进一步的突破来源于法拉第,他发现了磁作用来产生电流,即电磁感应。安培定律和法拉第电磁感应定律建立起了电与磁的密切联系。最常见的表达法拉第电磁感应的形式是

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.64)$$

$\mathcal{E}$ 是一个闭合回路中的电动势， $\Phi$ 是回路包围的磁通量。根据局域性的想法，回路导体中的电子应该受到当地场的作用而导致回路中电动势。而4.64式中出现的场是在回路包围的曲面上，而不是回路上，为此需要将4.64式改造成局域的形式。该式中对时间微分的是一个回路包围曲面上的磁场通量。可能依赖于时间的因素有两个：随时间变化的磁场和运动的回路。对于一个回路， $\vec{v}$ 为回路在 $d\vec{l}$ 处的速度。回路可以做任意的运动和变形。略去详细证明

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \\
 &= -\int d\vec{a} \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \\
 &= -\int d\vec{a} \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \\
 &= -\int d\vec{a} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \\
 &= -\int d\vec{a} \cdot \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{B} \right) \\
 &= \oint \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} \quad (\text{Stokes定理}) \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

这样，回路上的电动势就只与回路上场相关。下面我们会看到积分中的第二项来源于洛伦兹力。由于洛伦兹力的作用回路中出现的电动势为

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} + \vec{v}_d) \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4.66)$$

回路的速度 $\vec{v}$ 就是晶格的速度。 $\vec{v}_d$ 是电子相对于晶格的漂移速度。

$$\vec{v}_d \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\vec{v}_d \times d\vec{l} \cdot \vec{B} \quad (4.67)$$

在平均的意义下， $\vec{v}_d \parallel d\vec{l}$ ，因此上式为0。于是洛伦兹力产生的电动势成为了

$$\mathcal{E} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4.68)$$

需要解释的一个细节是：洛伦兹力并不做功，电动势从何而来？事实上洛伦兹力确实不做功，因此系统总的能量不会改变。但洛伦兹力可以使能量在系统内部重新分配。在上面这个情形中，电子相对于晶格的能量增加了（事实上如果不是超导体，最终增加的应该是内能），其代价是电子+晶格整体以 $\vec{v}$ 进行平动的动能会下降。以回路的动能为代价换取了电动势，而总能量不会改变。为了保持回路的速度不变，需要有外力做功。

除了洛伦兹力外另一项对电动势的贡献是矢量势的时间变化率。这意味着矢量势与动量有密切关系。矢量势在 $dt$ 时间内的变化等于电荷动量的改变。这

与标量势完全类似：标量势在 $d\vec{r}$ 距离上的变化等于电荷能量的改变。这给出了矢量势的物理图像，同时这也暗示着标量势与矢量势的关系类似于时间与空间、能量与动量的关系。

$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 和 $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ 这两个方程都讲的是静态场。然而法拉第电磁感应告诉我们场随时间的变化有着重要后果。将这两个场方程扩展到动态场，实现电与磁的统一，还需要最后一块拼图：电磁波。

## 4.4 电磁波

光作为一种波动行为已被研究了很长时间。人们可以在实验中测量光的波长和光的传播速度，并且发现在真空中光速是一个定值，但是光的本质仍然没有澄清。赫兹的实验利用天线产生了一种基于电磁效应的波动，并测量了频率和波长。实验中实现的电磁波，其频率远低于光，但是却具有相同的传播速度。据此，人们认为光也是一种电磁波，于是实现了电、磁、光的统一。极为重要的是，恒定的传播速度这样一个实验事实为将场方程扩展到动态场后的形式给出了限制。

在很多情形中，一个物理量在空间中的两点间会存在关联。这个量在某一点上的变化经过一段时间后会传播到另一点。如果传播过程中能量的耗散较弱，我们称这种传播的行为为波动，否则为扩散。事实上，二者之间没有明确的界限。这里我们来看看什么样的波动方程可以导致恒定的传播速度。

考虑一维空间中传播的波，波形不随时间变化，并整体以一定速度移动。这样的波可以用以下波动方程描述

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.69)$$

它的一般解为  $u = f(x - vt) + g(x + vt)$ ， $f$ 和 $g$ 为任意函数。证明如下： $\frac{\partial f}{\partial t} = -vf'$ ， $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''$ ， $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$ ，所以是方程的解。同样可以证明 $g$ 也是方程的解。这个解在运动中波形不变，并且波形的速度为 $v$ 。

行波解是一种特殊的解： $u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ 或 $A \cos(\omega t - kx)$ 。描述的是单一频率 $\omega$ 、单一波矢 $k$ 的波， $\omega = kv$ 。 $\omega$ 和 $k$ 呈线性关系，称没有色散。这时波速恒定。

可以看一个有色散的例子。将波动方程写为

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\omega_0^2}{v^2} u \quad (4.70)$$

将 $u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ 代入得到色散关系

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 v^2 \quad (4.71)$$

波的相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}} \quad (4.72)$$

依赖于频率，称为有色散。

我们下面将加入场对时时间的依赖性，并使得得到的波动方程给出无色散的解。

## 5 电磁作用的一般模型

实验永远不可能穷尽所有的情形。为了构建一个模型，人们往往需要依据已有的从实验得到的有限知识，按照一定的规则（如对称性、协变性），通过猜测进行推广，再进一步与更多的实验比较。电磁学的模型讨论的是微观上点电荷之间的相互所用。上一章描述了几个关键的实验事实。这一章我们将把这些知识在保证相对论协变性的前提下进行推广。因此本章只关心模型的内在逻辑。推广后的模型是否有效还需要与实验观测比较。而这样的实验往往是在宏观尺度上进行的。因此我们将在之后的几章发展宏观的模型。一方面将通过实验来说明微观模型的有效性，另一方面还将让我们看到在不同的尺度上会出现新的物理，所谓演生现象。

### 5.1 场方程

我们需要构造一个场方程，它满足相对论协变性，在不含时的情形下退化为静电场和静磁场的方程，在无源的自由空间中有无色散的波动解、波速等于恒定的光速 $c$ 。对于一个标量场，满足相对论协变性并且自由空间中有无色散的波动解、波速等于恒定的光速 $c$ 的波动方程是

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \quad (5.1)$$

但标量场只有一个分量，没有简单的办法在不含时情形下退化成为静电场和静磁场的方程。然后我们再尝试矢量场。假设一个矢量场 $(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ 。自由空间中满足条件的波动方程是

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda_\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 \Lambda_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

另一方面，如果让 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^{-2}$ ，那么实验测量得到 $\epsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ 。从而发现 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ 。于是静电场和静磁场的场方程可以写作

$$-\nabla^2 \left( \frac{\phi}{c} \right) = \mu_0 (c\rho) \quad (5.3)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.4)$$

如果令 $\Lambda = (\phi/c, \vec{A})$ 构成了一个四维矢量，并注意到 $J = (c\rho, \vec{j})$ 是一个四维矢量，那么作为一个最简单的猜测，一个满足相对论协变性、不含时情形下退



化为静电场和静磁场的方程、在无源的自由空间中无色散波动解的矢量场方程为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda_\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 \Lambda_\mu = \mu_0 J \quad (5.5)$$

用 $\phi$ 和 $\vec{A}$ ，就是

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \quad (5.6)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (5.7)$$

这个方程的一般解称为推迟势（详细推导略去）。结合电荷守恒可证明（同样略去详细推导）推迟势满足

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.8)$$

这也是个具有相对论协变性的形式，称为Lorenz（不是Lorentz）规范。可以看到由于电荷守恒在电荷与电流间建立了一定约束，这使得势的四个分量间也产生了约束。

同时需要推广的还有 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的定义

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.10)$$

$\vec{E}$ 的这个定义可以保持和法拉第电磁感应定律的一致性。是否这是个好的定义还需要通过下面讨论的运动方程来检验。如果以此定义出发可以得到一个简洁的和实验相符的运动方程，那么这就是好的定义。由 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的定义还可以直接导出

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.14)$$

称为Maxwell方程组。它来自于场方程加电荷守恒。

$\phi$ 和 $\vec{A}$ 分别与能量和动量相关，也如同能量和动量一样，构成了一个四维矢量。其相对论变换为

$$\phi' = \gamma(\phi - vA_x) \quad (5.15)$$

$$A'_x = \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) \quad (5.16)$$

$$A'_y = A_y \quad (5.17)$$

$$A'_z = A_z \quad (5.18)$$

$$\phi = \gamma(\phi' + vA'_x) \quad (5.19)$$

$$A_x = \gamma \left( A'_x + \frac{v}{c^2} \phi' \right) \quad (5.20)$$

$$A_y = A'_y \quad (5.21)$$

$$A_z = A'_z \quad (5.22)$$

据此，我们可以得到一个匀速直线运动电荷的场。

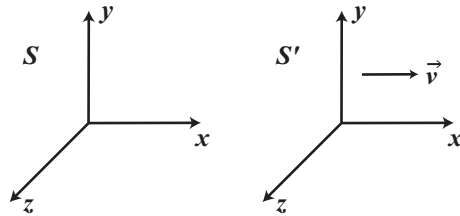


图 5.1:

在  $S'$  参考系中一个电荷  $q$  静止于原点，在  $S$  参考系中该电荷沿  $x$  轴以速度  $v$  向右运动。我们只讨论  $t = t' = 0$  时刻的场。在  $S'$  中，

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon r'}, \quad \vec{A}' = 0 \quad (5.23)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.24)$$

于是

$$\phi = \gamma\phi' = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon\sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5.25)$$

以及

$$A_x = \gamma \frac{v}{c^2} \phi' = \frac{v}{c^2} \phi, \quad A_y = A_z = 0 \quad (5.26)$$

电场

$$\vec{E} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}'}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.27)$$

由此可见，匀速运动电荷的电场与库仑场类似，仍然呈辐射状，但不再是球对称。其强度随方向不同而不同，在垂直速度方向最大。速度越快，电场越集中在垂直方向上。尽管垂直方向与水平方向电场不再相同，但电场仍然保持关于垂直于速度方向并穿过电荷这样一个平面的镜面对称，向前方向的场并不会比向后方向的场更强或更弱。

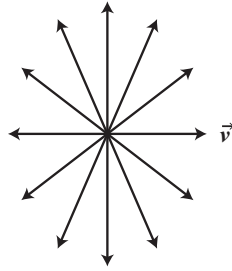


图 5.2:

一个惊人的事实是电场仍然以电荷瞬时的位置为中心向外呈辐射状分布。直觉上讲，由于相互作用的传递速度有限，空间中一点的场应该由更早些时刻电荷的运动状态决定。如图A'的位置满足 $|A'A|/|A'B| = \frac{v}{c}$ 。推迟时间 $\Delta t$ 需要使得B点的场由A'处电荷的运动决定。但有趣的是这个由之前时刻(A')所决定的场又恰好使得场在当前时刻沿当前位置呈辐射分布。这样看上去仿佛场来源于A，虽然实质上应该取决于A'。

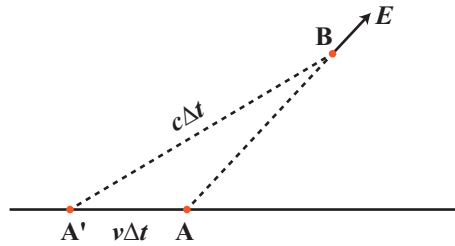


图 5.3:

尽管电荷运动使得电场偏离库伦场，但 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ 仍然成立。电场关于一个闭合曲面的积分不会依赖于其中包含的电荷是否运动，甚至是有加速度的运动。静电场的 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 不再成立，这容易通过电力线的图得到验证。

磁场为

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{v} \times \vec{r} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (5.28)$$

它以 $q$ 运动轨迹为圆心，呈圆形分布。我们可以看到电场和磁场通过相对论变换联系在一起。在一个参考系中没有磁场只有电场，而在另一个参考系中磁场和电场共存。容易证明这个匀速直线运动电荷的场满足Maxwell方程组，从而保持了相对论协变性。

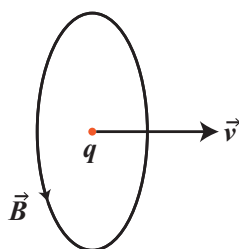


图 5.4:

我们再来看有加速度，即有辐射的情形。辐射在下图中可以得到更直观的理解。

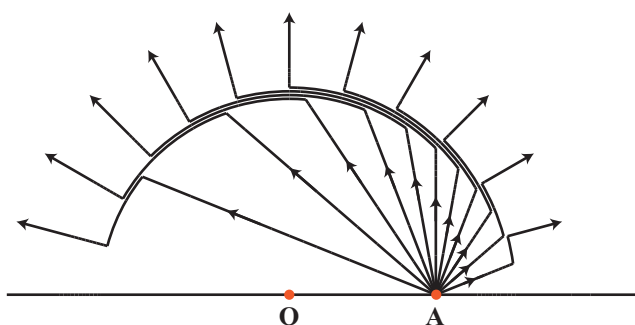


图 5.5:

一电荷初始时位于 $O$ 点，经过一短暂的时间 $\delta$ 加速后开始匀速运动。在时间 $t$  ( $t \gg \delta$ ) 电场如图所示。 $0 \sim \delta$ 这段时间的电场形成一个球壳。球壳外是电荷静止于 $O$ 点时的电场。球壳内是在 $A$ 点以匀速运动的电荷的场。球壳上的电场以折线连接。球壳半径 $R \sim ct$ 。球壳厚度 $\sim c\delta$ 。首先看到的是加速电荷产生的场垂直于径向方向。下面估算壳内电场对 $R$ 的依赖关系。图中这个环面的面积是 $2\pi R\Delta R$ ，电场的通量是 $2\pi R\Delta RE$ 。这个通量始终是一个常数，而无论 $R$ 有多大，因此 $E \propto \frac{1}{R}$ 。辐射场来源于有加速度的电荷。

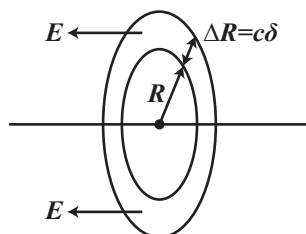


图 5.6:

再看一个例子：一个参考系中只有磁场，而另一个参考系中同时存在电场和磁场。如图，用线性排列的静止负电荷和匀速运动的正电荷来代表一根

载流的导线。导线为电中性，正负电荷的线密度分别为 $\lambda$ 和 $-\lambda$ 。电流 $I = v_0\lambda$ ， $v_0$ 为电子速度。

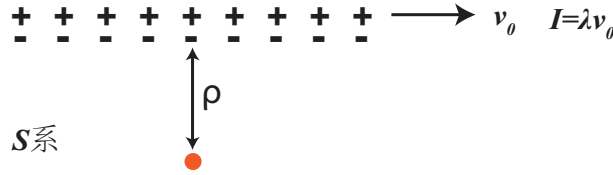


图 5.7:

S系中

$$\phi = 0, \quad A = -\frac{\mu_0 v_0 \lambda}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.29)$$

电场为0，磁场为 $\frac{\mu_0 \lambda v_0}{2\pi \rho}$ ，这时没有电场只有磁场。变换到参考系 $S'$ ，

$$\phi' = \gamma(\phi - vA_x) = \frac{\gamma \mu_0 v_0 v \lambda}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.30)$$

$$A' = \gamma(A - v\phi/c^2) = -\frac{\gamma \mu_0 v_0 \lambda}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.31)$$

由此得到电场为 $\frac{\mu_0 \gamma \lambda v v_0}{2\pi \rho}$ ，磁场为 $\frac{\mu_0 \gamma \lambda v_0}{2\pi \rho}$ 。通过洛伦兹变换得到的场也同样可以从场方程直接得到。如图，在 $S'$ 中正负电荷的密度不再相等，因此导线带电。

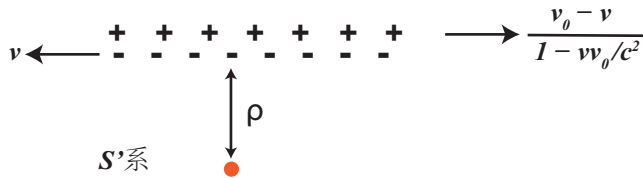


图 5.8:

负电荷密度 $-\gamma\lambda$ ，正电荷密度 $\gamma\lambda(1 - \frac{vv_0}{c^2})$ ，因此总的电荷密度 $-\gamma\lambda\frac{vv_0}{c^2}$ 。电流为 $\gamma v_0 \lambda$ 。由此可得到与用洛伦兹变换得到的相同的电场和磁场。这与作为四维矢量的势满足协变性场方程相一致。

再回顾一下我们已经做了什么。根据静电荷的实验，我们写下了一套场方程 $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$ 和运动方程 $\vec{F} = q\vec{E}$ ，其中 $\vec{E}$ 定义为 $-\nabla\phi$ 。这个力仅限于两个静止电荷之间。再根据稳恒电流的实验，写下了另一套场方程 $\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ 和运动方程 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，其中 $\vec{B}$ 定义为 $\nabla \times \vec{A}$ 。这个力仅限于一个稳恒电流产生的场中电荷的受力。然后我们假定 $(\phi/c, \vec{A})$ 构成了一个四维矢量，将静场的场方程推广到具有相对论协变的场方程，并得到了与实验相符的电磁波。

这样的场方程看上去很自然和简洁。因此我们相信这是一种有效的做法，并将其作为进一步讨论的基础。除此之外我们还修改了 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的定义。之后我们还需要讨论运动方程。有了运动方程我们才能够将模型的预言与实验中的可观测量进行比较，比如法拉第电磁感应定律中的电动势。所有这些都是试图在协变性的要求下将模型进行推广，还不涉及到更多的新的实验事实。上述的两个例子验证了推广后的模型在这两个具体的情形下满足协变性。

我们将 $\phi$ 和 $\vec{A}$ 认作是更基础的物理量，而 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是导出量，尽管 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是更方便直接测量的量。这样做的直接原因是在更一般的框架中，人们将从拉氏量出发构造模型。拉氏量可以基于 $\phi$ 和 $\vec{A}$ 写成很简洁的形式。如果使用 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 来写拉氏量，即使不是不可能也会是极其困难的。更进一步，在量子力学中，如果需要使相互作用具有局域性，势是必须的。当然，我们实际定义的可测量量都需要通过对势进行运算得到。而由于所谓规范变换，势并不唯一。这多出的自由度是使得模型更为简洁而付出的代价。同时也又一次说明可测量量只是人对于世界的印象，是模型的约化。这种情形在量子力学中有更突出的表现。

## 5.2 电磁波

在无源的自由空间中Maxwell方程组写为

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.32)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.34)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

我们发现这组方程存在这样一个平面波解

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) \quad (5.37)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \quad (5.38)$$

$$(5.39)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 为波长。 $\omega$ 与 $k$ 之间的关系（称为色散关系）待定。

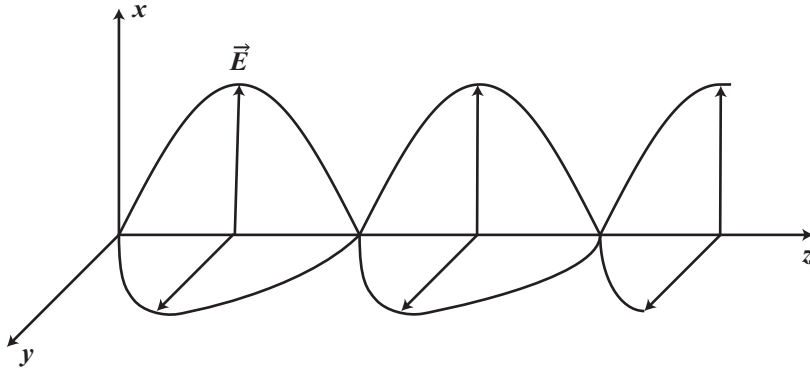


图 5.9:

可以证明平面波解满足Maxwell方程组。首先,  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$ 。有关电场旋度的方程

$$\nabla \times \vec{E} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} = -kE_0 \sin(kz - \omega t) \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega B_0 \hat{y} \sin(kz - \omega t) \quad (5.41)$$

为了满足  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , 要求

$$E_0/B_0 = \frac{\omega}{k} \quad (5.42)$$

再看有关磁场旋度的方程

$$\nabla \times \vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{x} = kB_0 \sin(kz - \omega t) \hat{x} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \omega E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) \quad (5.44)$$

为了满足  $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , 要求

$$kB_0 = \frac{\omega E_0}{c^2} \quad (5.45)$$

综合两个旋度方程的要求, 得到

- (1)  $\omega = kc$ ,  $\omega$ 和 $k$ 之间满足线性色散关系 (无色散)。
- (2) 波速为光速 $c$ 。
- (3)  $\vec{E} \perp \vec{B}$ ,  $E_0 = cB_0$ , 传播方向 $+z$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ 同时达到极大。

### 5.3 运动方程

推导运动方程的一般方法是去寻找一个相对论协变的形式。我们不打算介入更多的张量计算，因此代之以一些特例来验证。在相对论中，我们仍然把力定义为  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ 。在此定义下发现

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.46)$$

符合相对论协变性，称为洛伦兹力。这个形式不再假定  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$  分别来源于静止电荷和稳恒电流，而将其推广到一般情形。这符合场的精神。在一个好的模型中，一个电荷只与它当地的场相互作用，而不应该去管它是怎么产生的。需要再一次强调的是在此我们做的是模型与相对论协变性相容的验证，并不涉及任何新的实验事实。进一步实验验证将在之后几章中进行。下面通过一些特例验证力  $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  符合相对论协变性。

在 S 和 S' 两个参考系中力的定义为  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  和  $\vec{F}' = d\vec{p}'/dt'$ 。纯粹利用洛伦兹变换容易得到如下的力变换，其中  $u$  是粒子的速度。

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{u})}{1 - vu_x/c^2} \quad (5.47)$$

$$F'_y = \frac{F_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \quad (5.48)$$

$$F'_z = \frac{F_z/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \quad (5.49)$$

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}(\vec{F}' \cdot \vec{u}')}{1 + vu'_x/c^2} \quad (5.50)$$

$$F_y = \frac{F'_y/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \quad (5.51)$$

$$F_z = \frac{F'_z/\gamma}{1 + vu'_x/c^2} \quad (5.52)$$

如图，我们来看两个点电荷之间的作用力。在 S' 系中，两电荷静止。  $q_2$  受到  $q_1$  的力只有 y 分量，为

$$F'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \quad (5.53)$$

直接根据力的相对论变换得到 S 系中的力为

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \quad (5.54)$$



另一方面，根据上一节得到的运动电荷 $q_1$ 在 $q_2$ 处的电场和磁场分别为

$$\vec{E} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a^2} \hat{y}, \quad \vec{B} = \frac{v}{c^2} \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a^2} \hat{z} \quad (5.55)$$

于是

$$\vec{F} = q_2(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \quad (5.56)$$

与力直接的相对论变换得到完全相同的结果。这与 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 能保持相对论协变性是一致的。

另一个例子。如图，一个运动的点电荷与一根线电荷之间的作用力。在S参考系中，电荷只受到磁场力

$$F = qvB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\lambda v v_0}{\rho} \quad (5.57)$$

在S'参考系中，电荷只受到电场力

$$F' = qE' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\gamma q\lambda v v_0}{\rho} = \gamma F \quad (5.58)$$

另一方面，直接根据力在y方向的相对论变换

$$F' = \frac{F/\gamma}{1 - v^2/c^2} = \gamma F \quad (5.59)$$

得到相同结论。这体现了 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 的协变性。

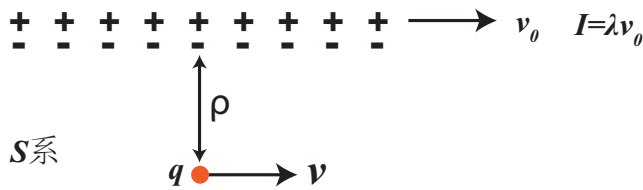


图 5.10:

在处理磁场的洛伦兹力时有一个有用的技巧，成为Larmor定理。它说的是，均匀磁场对于电荷运动的影响可以通过变换到转动参考系消除。即，变换到转动参考系这样一个非惯性系后，洛伦兹力不再出现。在实验室参考系中，电荷受到的力为 $\vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}$ 。 $\vec{F}$ 为除洛伦兹力外的其他力，如将电子束缚在原子核周围的静电库仑力。实验室参考系与转动参考系的速度满足如下关系，

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (5.60)$$

$\vec{\Omega}$ 为转动参考系的角速度。洛伦兹力可表示为

$$q(\vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \quad (5.61)$$

转动参考系中的运动方程

$$m\vec{a}_{\text{rot}} = \vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (5.62)$$

其中虚拟力的第一项为Coriolis力，第二项为离心力。将转动参考系的洛伦兹力表达式代入，得到

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{\text{rot}} &= \vec{F} + q\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{B} + q\vec{\Omega} \times \vec{r} \times \vec{B} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{F} + \vec{v}_{\text{rot}} \times (q\vec{B} + 2m\vec{\Omega}) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times (q\vec{B} + m\vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (5.63)$$

如果取

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B} \quad (5.64)$$

称为Larmor频率，并记为 $\vec{\Omega}_L$ ，那么运动方程成为

$$m\vec{a}_{\text{rot}} = \vec{F} + m\vec{\Omega}_L \times (\vec{\Omega}_L \times \vec{r}) \quad (5.65)$$

Larmor定理尤其有用的情形是上式右侧第二项比 $\vec{F}$ 小得多的时候。这时在转动参考系中，磁场完全可以忽略，并且有和实验室参考系完全相同的运动方程。

## 5.4 法拉第电磁感应中的协变性

我们再来看法拉第电磁感应中体现的协变性。这主要表现在电场的定义中。

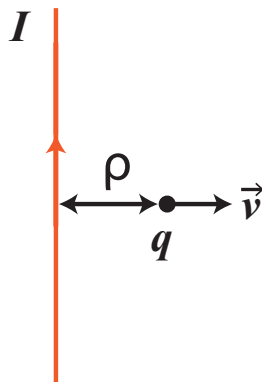


图 5.11:

如图，一根中性导线中的电流为 $I$ 。在 $S$ 参考系中，电荷 $q$ 受到的磁场力为

$$F_y = \frac{\mu_0 qvI}{2\pi \rho} \quad (5.66)$$

这是所谓动生电动势的来源。

在 $S'$ 参考系中，导线向左以速度 $v$ 运动。由于速度垂直于导线，所以没有洛伦兹收缩，导线仍为中性，没有静电力。 $S'$ 系中电荷静止，因此没有洛伦兹力。但由相对论变换得知，电荷受到的力应为

$$F'_y = \frac{F_y/\gamma}{1 - v^2/c^2} = \gamma F_y = \frac{\mu_0 \gamma qvI}{2\pi \rho} \quad (5.67)$$

这个力来源于

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.68)$$

在 $S'$ 中，由于导线的运动，空间中一点的矢量势是时间的函数。

$$A' = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho'}{\rho'_0} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho/\gamma}{\rho'_0} \quad (5.69)$$

电场

$$E' = -\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\mu_0 I \gamma v}{2\pi \rho} \quad (5.70)$$

力为

$$\frac{\mu_0 \gamma qvI}{2\pi \rho} \quad (5.71)$$

与相对论变换得到的结果相同，这是所谓感生电动势的来源。

在Maxwell方程组中，感生电动势看上去来源于变化的磁场： $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ 。这通常被说成变化的磁场产生电场。类似地，第四个方程中的所谓位移电流项也被说成是变化的电场产生磁场。然而，如果我们再来看 $A$ 和 $\phi$ 的场方程，就会发现方程的右边只有电流密度和电荷密度。势只能产生于电荷。电场与磁场间存在某些关联，但并不是互相产生的关系而更像是伴随的关系。这种关系已经蕴藏在了电荷和电流的分布中，并随着场的传播而始终保持下来。

我们现在有了一组推广后的相对论协变性场方程和运动方程。但满足协变性的推广并不是唯一的。目前这个模型的有效性仍然需要更多实验的证实。这是之后几章的主要内容。

## 5.5 电磁场的能量

一般地对电荷体系，我们可以写下能量守恒的形式。电荷总动能的变化率

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{j} d\vec{r} \quad (5.72)$$

$$\text{而 } \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{由 } \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}), \text{ 并且 } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

得到  $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ 。于是

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (5.73)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\vec{r} - \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} \quad (5.74)$$

可以将右边的第一项指认为场的能量密度，第二项为流出表面的能量。这时一种最简单的方法，但并不唯一。事实上还没有实验来明确地将  $\frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$  认定是场的能量密度。 $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$  称为 Poynting 矢量，代表能流密度。



## 6 导体的静电学

我们开始讨论宏观尺度下的物理。其原因有三个：一、对微观模型进行约化得到对宏观现象的描述。这种描述的有效性可用于检验微观模型。二、宏观尺度下会出现新的可观测现象。我们需要基于微观模型建立描述宏观可观测量的模型。三、宏观物理的应用。

固体是原子的聚集体，往往形成晶体，是一种典型的宏观体系。一个固体在整体上为电中性。固体中相邻原子的间距为原子半径量级。通常我们把一个原子分为离子和价电子。离子上的电子紧密束缚在原子核周围，轨道半径很小，称为芯电子，几乎对化学反应没有贡献。价电子为外层电子。原子半径由价电子轨道决定。当两个原子相互接近到原子半径距离时，价电子间有较强的相互作用，并可能在原子间迁移。但是价电子能否迁移还取决于是否有能量相近的空轨道。例如钠原子的电子结构是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ，3s是价电子轨道。一个轨道上可以占据两个电子，因此3s电子可以在原子间迁移。又如镁的电子结构为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ 。虽然3s轨道已经占了两个电子，但是处于晶体中的Mg原子的3s轨道和3p轨道在能量上有重叠，因此仍然是导体。我们把这样的固体称为导体，否则称为介电体（绝缘体）。例如，碳原子在形成金刚石的时候，每个碳原子都与周围另外四个碳原子形成共价键。每个共价键上占据两个电子，因此没有可以供电子迁移的空轨道，金刚石是绝缘体。又例如NaCl， $\text{Na}^+$ 离子和 $\text{Cl}^-$ 离子的电子结构分别 $1s^2 2s^2 2p^6$ 和 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ 。每个轨道上都占据了两个电子，因此为绝缘体。为绝缘体中的电子也可以迁移到更高能量的轨道上，条件是很高温度或很强电场（称为击穿）。在低温和弱场极限下，绝缘体的电阻趋于无穷大，而导体趋于一个有限值。一个均匀导体中的任何电场都会引起电子的迁移。

固体可以和其他电荷相互作用。这些其他电荷我们统称为外部电荷，尽管在空间上这些电荷有可能处于固体内部。一个固体在微观上由原子组成，而我们要关注的是宏观场（也称为长波近似）。我们所关心的问题都有两个明确的空间尺度：其一是Å量级的原子尺度，场和电荷的分布在空间上有剧烈变化。其二是电场中除尺度为Å量级的涨落之外的宏观分量。这个宏观分量可以由外部电荷产生，如各种产生电磁波的源，其特征长度（如波长）要远大于原子尺度。宏观分量也可以由固体本身的电荷产生，如导体中的静电感应、电介质中的极化，具有长的特征长度（长波长）。我们的讨论不适用于短波长电磁波（如X射线）与固体的相互作用。

测量仪器的测量结果是对微观物理量的平均。依赖于我们关心的物理，这个平均可以在不同的尺度下进行。例如，在讨论一个在几百纳米尺度上有明显变化的物理量，我们就可以选择一个若干纳米的尺度对微观进行平均。这样的尺度既足够大可以消除Å量级原子尺度上的剧烈涨落而又足够小而反映更大尺度上的变化。由此我们可以得到宏观电磁学的有效模型。在更大的尺度上，我们还可以将系统划分成分立的元件，即电路模型，这时电磁振荡的波

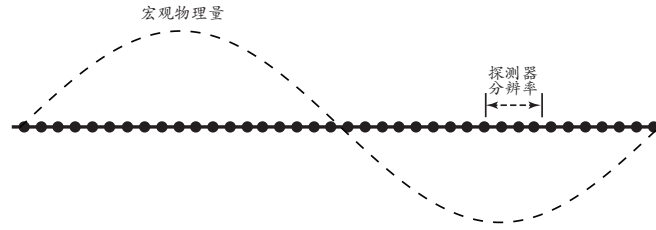


图 6.1:

长要远大于系统。而当波长远小于系统线度时，我们又会得到另一个层次的有效模型，例如几何光学。

在我们将讨论的宏观电磁学中，平均都是对一个宏观小微观大的体积进行的。这个体积的线度要远大于原子尺度，但又远小于宏观场的特征长度。对点电荷进行平均后，电荷密度和电流密度都可以看做空间的连续函数。以下讨论中的宏观电场记为 $\vec{E}$ 。采用同样记号的还有磁场、势、电荷密度。电流密度的宏观分量记为 $\vec{j}$ 。

宏观的物理中，力更直接。因此我们将主要使用 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ ，并假设它们不随时间变化。于是 $\rho$ 和 $\vec{j}$ 也不是时间的函数。Maxwell方程组成为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.4)$$

进行空间平均后，方程变为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \quad (6.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.8)$$

本章只讨论前两个方程，称为静电学。导体中的价电子在外场作用下会移动，产生电流。而介电体中，价电子不能迁移，但是可以产生极化。在本章我们讨论前者。

## 6.1 电子的流动

处于热力学平衡的系统不会有宏观的流。否则这个流会逐渐将能量耗散到微观自由度上而消失。摩擦力、粘滞力等都指的是这种耗散机制。在导

体中，如果宏观电场不为零，导体中电子在电场作用下会产生宏观的定向运动，即电流。这时导体处于热力学非平衡态。一般地， $\vec{J}$ 是 $\vec{E}$ 的函数，并且 $\vec{E} = 0$ 时 $\vec{J} = 0$ 。于是我们可以进行泰勒展开。假设导体各向同性，取最低阶非零项

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6.9)$$

这个唯像关系称为欧姆定律， $\sigma$ 称为电导率，依赖于材料。

在有电流流过导体时，组成电流的每一个电子都会通过非弹性过程而损失能量，称为焦耳热，其功率为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \sum q_i \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{r}_i = \sum q_i \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{v}_i = \int \vec{J} \cdot \vec{E} d\vec{r} \quad (6.10)$$

功率密度为 $\vec{J} \cdot \vec{E}$ 。当欧姆定律成立时，功率为 $J^2/\sigma$ ，这个能量耗散到导体中，成为热运动的能量。

能够很好用欧姆定律描述的情形称为欧姆输运。如图，对于处于欧姆输运区的导体，一个一般的问题是接上若干处于一定电压的电极求出导体内部的电场分布，并进而得到各处的电荷密度和电流密度。

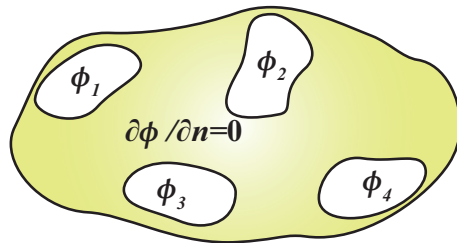


图 6.2:

一般地，我们需要电场的散度和旋度两个方程来求出电场。但是对于目前这个问题，电荷密度未知，因此只能用上 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 这一个方程。为了得到散度的方程，需要用到电荷守恒和欧姆定律。静电学条件下，电场和电流都不是时间的函数。不随时间变化的电流称为稳恒电流。此时 $\bar{\rho}$ 和 $\vec{J}$ 都不随时间变化。由连续性方程 $\partial \bar{\rho} / \partial t + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，可知 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 。同时欧姆定律又给出 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 。于是，

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \quad (6.11)$$

即 $\sigma \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla \sigma = 0$ 。



如果 $\sigma$ 不均匀, 则 $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ , 空间会有电荷积累。对于均匀导体,  $\nabla \sigma = 0$ , 于是 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , 导体内部无电荷积累。这样我们就有了用于求导体内宏观电场分布的两个方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (6.12) \\ \nabla \times \vec{E} = 0 & (6.13) \end{cases}$$

导体内宏观电荷密度处处为零。非零的电荷密度只出现在表面上。

定义电势:  $\vec{E} = -\nabla\bar{\phi}$ , 有 $\nabla^2\bar{\phi} = 0$ 。这样问题就转化为在一定边界条件下解方程 $\nabla^2\bar{\phi} = 0$ 。其中一部分表面的边界条件为给定的外电势, 通过施加了电压的电极实现。没有电极的导体表面处可以这样处理: 在表面外侧 $\vec{J} = 0$ , 而 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , 所以在表面内侧有 $\hat{n} \cdot \vec{J} = 0$ ,  $\hat{n}$ 由导体指向外。这意味着 $\hat{n} \cdot \nabla\bar{\phi} = 0$ , 即在表面上 $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} = 0$ 。于是就有了如图所示的边界条件。数学上可以证明, 在如此边界条件下,  $\nabla^2\bar{\phi} = 0$ 有唯一解, 进而得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{J}$ 。

对于只有两个电极的情形, 设两个电极的电势分别为 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 。定义电阻 $R = \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{I}$ , 其中 $I = |\int \vec{J} \cdot d\vec{S}| = |\int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}| = |-\sigma \int \nabla\bar{\phi} \cdot d\vec{S}| = \sigma |\int \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} dS|$ ,  $S$ 紧邻一个电极的表面。 $I$ 是从一个电极流入或流出的电流。解出 $\bar{\phi}$ 后代入上式即可得到 $I$ , 从而得到 $R$ 。由于方程的线性性质,  $R$ 为一常量, 并由电导率、导体几何形状、电极的几何形状和位置决定。一个简单的情形:

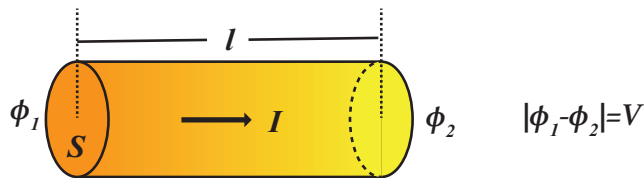


图 6.3:

假设体内电流密度均匀, 这是个合理的假设。如果如下图上下两边 $J$ 不同, 那么 $\vec{E}$ 就会不同, 于是 $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ 。



图 6.4:

再假设如图的电子注入方式, 这样 $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} = \frac{V}{l}$ , 于是 $I = \sigma \frac{VS}{l}$ , 得到 $R = \frac{l}{\sigma S}$ 。



图 6.5:

导体内部存在驱动电荷运动的宏观电场，但宏观电荷密度为零。因此产生这个电场的电荷不在导体内部，只能存在于导体表面上。如图，对于一个载有稳恒电流的导体，表面上存在非零的电荷密度。其产生的电场在导体内部紧邻表面处只有切向分量，因为这里的 $\vec{j}$ 平行于表面。

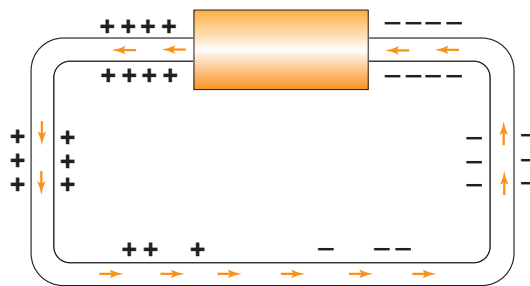


图 6.6:

静电力无法提供耗散的能量，因为 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 。在一电路中必存在一些位置可以提供这个能量，例如电池等，其两端的电势差称为电动势（严格地讲应该在开路状态下），记为 $\mathcal{E}$ ， $\mathcal{E} = IR$ 。

四种基本相互作用中，人类日常生活用的最多的是电磁作用。其基本用途有两类：做功和信息传递。做功主要是静电力。但由于 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ，为了做功，需要引入非静电力。这部分非静电力对电荷做的功称为电动势，例如 Lorentz 力、光激发、化学反应（虽然看似静电力，但化学反应总是涉及到电荷的快速转移）等等。这些非静电力做的功可以是集总的（如电池），也可以是分布式的（如 Lorentz 力）。但总之，当电荷完成了一个回路的循环后，非静电力做的功为 $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 。电动势定义为 $\mathcal{E} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}/q_0$ 。

## 6.2 热力学平衡态的导体

如果均匀导体内部宏观电场（电荷密度）不为零，那么在电场作用下出现的电流会迅速地实现地电荷密度降为零。这个时间尺度在 $10^{-15}$  s。一种估计电子响应时间的方式如下：由欧姆定律、高斯定律、连续性方程： $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ， $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ， $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ，得出 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$ ，解为 $\rho = \rho_0 e^{-t/(\epsilon_0/\sigma)}$ ，弛豫

时间为 $\epsilon_0/\sigma$ 。对于良导体 $\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ，这个时间 $\sim 10^{-18} \text{s}$ 。这个时间过短。原因是在这个尺度下，欧姆定律不再适用。欧姆定律来源于导体中电子与缺陷等的散射，只有外场的特征时间内已经发生了多次散射，欧姆定律才成立。通常散射时间为 $10^{-14} - 10^{-15} \text{s}$ ，这时欧姆定律不再适用。

处于热力学平衡状态的均匀导体无宏观电流，因而内部的宏观电场为零、宏观电势处处相等。一个不均匀的导体（如两种金属的异质结），其内部可以存在不导致电流的宏观电场，如界面上的内建电场。这是由于电子运动的驱动力除电场外还有化学势。当二者达到平衡时，一般宏观电场不会为零。我们只讨论处于热力学平衡态的均匀导体。虽然其内部的宏观电场为零，但微观上的电场有着剧烈的空间涨落。

由于导体内部 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，因而宏观的电荷密度 $\bar{\rho}$ 也必须处处为零。但导体与真空的界面附近为非均匀区，没有理由要求电场为零，因此可以有非零的宏观电荷密度。这个界面区在导体内表面一侧的厚度通常有若干个原子层，其电荷分布可以用宏观面电荷密度 $\bar{\sigma}$ 表示。于是，如果导体上没有过剩电荷（过剩电荷属于外部电荷），则导体表面上分布的电荷总量应等于过剩电荷的总量。没有过剩电荷的导体并不意味着表面的宏观电荷密度处处为零。只有如球形、无限大平面这些对称性高的形状，无过剩电荷才会意味着宏观面电荷密度处处为零。这些导体表面上的电荷和导体之外的电荷共同决定电场的空间分布。尤其是对于导体之外固定的电荷分布，导体表面上的宏观面电荷密度总是调整得使导体内部宏观电场为零。外场诱导导体表面电荷的现象称为静电感应。

在导体的外表面，微观上的电场涨落在几个纳米远的地方变得可以忽略不计，电场由导体表面上连续的宏观面电荷密度和导体之外的电荷决定。导体外表面的宏观电场必须垂直于表面，表面外侧为等势面，否则切向的宏观电场分量会引起宏观面电荷的重新分布。在表面一个局部的位置取一个高斯面，其上下面平行于表面并分别位于导体的外侧和内侧，侧面垂直于表面。导体外侧宏观电场为 $\vec{E}$ ，内侧电场为0。利用高斯定理得到 $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0$ 。于是表面上总的电荷量为 $Q = \int \sigma da = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\epsilon_0 \int \nabla \bar{\phi} \cdot d\vec{a}$ 。

如果导体内部有空洞，则其内表面上不会有过剩电荷（过剩电荷仅存在于外表面），空洞内等势，证明如下。假如空洞内不等势，设紧邻导体内表面外侧的电势为 $V_1$ ，空洞内一等势面的电势为 $V_2$ 。如果 $V_1 \neq V_2$ ，那么必有电场存在于两个面之间，且电场指向一致。这样一个高斯面上的电场积分不再为0，这与空洞内没有电荷矛盾。空洞内等势也就意味着内表面上无过剩电荷。这种称为静电屏蔽效应的行为意味着一个内部有空洞的导体，其外表面上电荷的分布会使得空洞内的电场为0，而不受外部的电场影响。外部的电场会被导体外表面电荷所抵消。此外内表面不仅总电荷为0，而且面电荷密度处处为0，否则就会在空洞中出现电场。如果空洞中有电荷，电量为 $Q$ ，则内表面会诱导出同样大小的但符号相反的电量 $-Q$ ，外表面诱导电荷 $Q$ ，总的电荷分布使得导体内宏观电场为0。

可以对静电屏蔽作一个简单的估计。假如电场强度为 $1 \text{ V}/\mu\text{m}$ ，即 $10^6 \text{ V/m}$ 。这时，诱导的表面电荷密度为 $\sim 10^{-11} \times 10^6 \sim 10^{-5} \text{ C/m}^2$ ，即 $10^{10}$ 个电子每平方厘米。对于一个厚度为 $1 \mu\text{m}$ 的导体，体电荷密度 $\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ，折合到单位面积上为 $10^{19} \text{ cm}^{-2}$ 。于是诱导电荷仅占很小部分，但对于很薄的导体，并且自身的电子密度比较低时，情形会很不同。

### 6.3 库伦定律的实验验证

有了宏观导体的静电学性质，我们就可以做实验来检验场方程。具有相对论协变性的场方程可以有无数种选择。一种偏离现有模型但又足够简单并满足相对论协变性的可能形式是

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu_\gamma^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (6.14)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_\gamma^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (6.15)$$

$\mu_\gamma$ 是否小到可以忽略不计还需要实验来判断。如果只关心静电场，那么一个点电荷 $q$ 的电场和电势分别为

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} e^{-\mu_\gamma r} \quad (6.16)$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\mu_\gamma}{r} \right) e^{-\mu_\gamma r} \quad (6.17)$$

如果 $\mu_\gamma \neq 0$ ，那么前面基于库伦定律的讨论，如静电屏蔽等，都会出现与实验的偏差。目前的实验结果表明 $\mu_\gamma^{-1} > 10^8 \text{ m}$ ，即在远小于 $10^8 \text{ m}$ 的尺度上，库伦定律非常准确。



## 7 介电体

我们的出发点仍然是

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (7.2)$$

$$(7.3)$$

对于处在热力学平衡态的均匀导体，我们发现体内 $\bar{\rho} = 0$ 。现在我们来关注处在热力学平衡态的介电体应如何处理 $\bar{\rho}$ 这个量。有了 $\bar{\rho}$ 就可以全面了解宏观电场。

### 7.1 多极展开

对于介电体中的电磁现象，相互作用发生原子分子尺度上。因此需要我们首先研究一个微观单元上的物理，然后再进行平均。作为最简单的一个方案，我们要求微观上在划分单元时，每个单元（如原子分子）都为电中性。这样做的好处是电中性体系电势的展开式中总电荷一项的贡献为零，最低阶为偶极项，即使在外场作用下总电荷项仍然保持为零。这有利于问题的简化。在将系统划分为电中性微观单元时，我们会碰到一些困难，例如共价晶体和离子晶体的情形。前者电子的运动非常离域，因此划分单元的界线很任意。后者在选择哪些离子构成一个电中性单元时具有任意性。这些任意性都需要更复杂的模型来处理。我们仅讨论一些简单的情形，要求系统在微观上能自然、明确地划分为电中性的组成单元。例如，冰可以看作由比较孤立的水分子组成，而每个电子又都局域在其所属的分子上运动。这样将每个水分子看作一个基本单元就是一个自然、合理的选择。

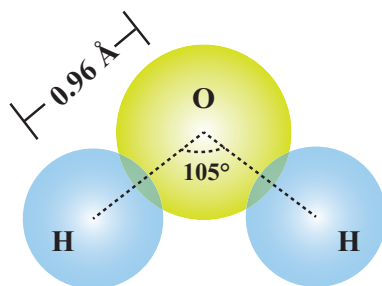


图 7.1:

原子或分子均为电中性。但其电场并不一定为零。对于一个电荷分布，当测

量电场的位置到电荷的距离远远大于电荷分布的线度时，可以用一系列参量来刻画这个电荷分布在远处产生的场。

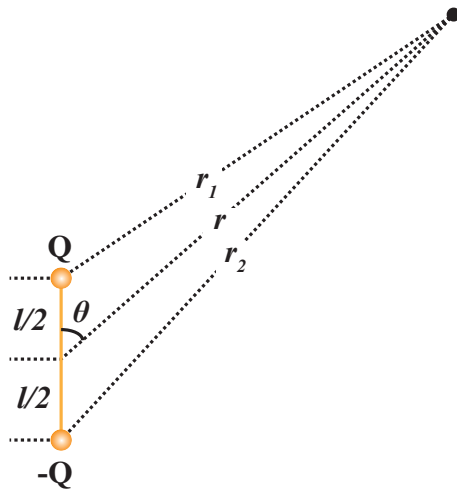


图 7.2:

如图两个电荷 $Q$ 和 $-Q$ 的情形，体系为中性。当 $r \gg l$ 时，

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} \\
 &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{l \cos \theta}{2}} - \frac{1}{r + \frac{l \cos \theta}{2}} \right) \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{l \cos \theta}{2r}} - \frac{1}{1 + \frac{l \cos \theta}{2r}} \right) \\
 &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left( 1 + \frac{l \cos \theta}{2r} \right) - \left( 1 - \frac{l \cos \theta}{2r} \right) \right) \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{l \cos \theta}{r} = \frac{Ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

定义 $p = Ql$ 为电偶极矩，于是 $\phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。 $p$ 给出了电荷分布的一些细节，依赖于 $Q$ 和 $l$ 的乘积。一个理想的电偶极子是取 $l \rightarrow 0$ ，而保持 $Ql$ 不变。一个电偶极子的电势对距离的依赖关系是 $\frac{1}{r^2}$ ，比单电荷的场的衰减要快。电偶极子的场具有方向依赖性。

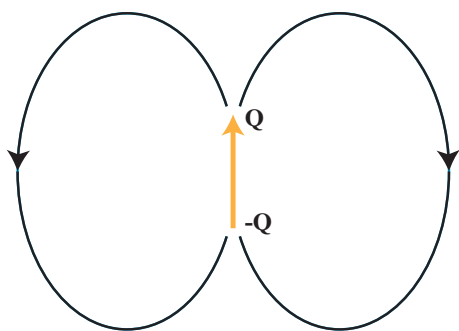


图 7.3:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (7.5)$$

$$= -\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) - \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \quad (7.6)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \quad (7.7)$$

电偶极矩对于电中性的电荷分布是首要重要的项。如在Taylor展开中保留更高阶，则可以得四极矩、八极矩等等。但这些参量对应的电场在距离上比偶极矩的衰减要快。

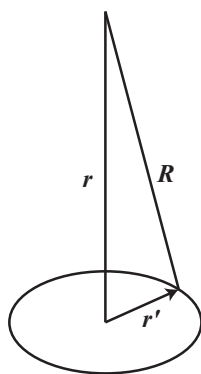


图 7.4:

如图，一般地

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\vec{r}' \quad (7.8)$$

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2} \quad (7.9)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 + \left( \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos\theta \right) \right)^{-1/2} \quad (7.10)$$



$$= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} + O \left( \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \right) \right) \quad (7.11)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \int \rho d\vec{r}' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \rho d\vec{r}' + \frac{1}{r^3} \int r'^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \rho d\vec{r}' + \dots \right) \quad (7.12)$$

称为多极展开。在远处电势主要由展开中第一个非零项决定。例如中性体系，最重要的项是偶极项等。如图四个电荷的体系，偶极项为0，第一个非零项是四极矩。高阶矩刻画了电荷分布更多的细节。

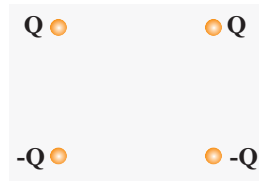


图 7.5:

电偶极矩的电势

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int r' \cos \theta \rho d\vec{r}' \quad (7.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \hat{r} \cdot \vec{r}' \rho d\vec{r}' \quad (7.14)$$

$$= \frac{\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int \vec{r}' \rho d\vec{r}' \quad (7.15)$$

记  $\int \vec{r}' \rho d\vec{r}' = \vec{p}$  为偶极矩，那么

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.16)$$

电场

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \quad (7.17)$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \quad (7.18)$$

偶极场适用于距离远大于电荷系统线度的情况。在距离电荷近的地方，高阶矩开始有明显的贡献。

可以证明在电场中一个偶极子受到的力矩是

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (7.19)$$

如果电场不均匀，偶极子会受力，可以证明力的大小是

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (7.20)$$

每个原子或分子都看做是一个电荷的分布，它产生的电势为

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \sum_{ij} Q_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right) \quad (7.21)$$

电中性使得没有 $1/r$ 项， $\vec{p}$ 为偶极矩， $Q_{ij}$ 为四极矩，等等

一个分子可以有永久偶极矩，也可以被电场诱导出偶极矩。极性分子具有永久的偶极矩，如水分子。两个O-H键成 $105^\circ$ 角，成键后电子会从H向O转移，使得O带负电，H带正电。 $p = 6.13 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ ，相当于一个电子偏离正电荷约 $0.4 \text{ \AA}$ 。其它的常见的极性分子有CO,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{CH}_3\text{OH}$ ,  $\text{HCl}$ 等等。极性分子在电场中优先沿电场方向取向。热运动会影响极性分子其沿外场方向的排列。一般地，分子取向的几率由Boltzmann因子 $\exp(pE \cos \theta / k_B T)$ 决定， $\theta$ 为分子偶极矩与电场的夹角。 $p$ 是分子的永久偶极矩。通常的电场强度下，比如 $10^3 \sim 10^6 \text{ V/m}$ ， $pE \lesssim 1 \text{ meV}$ ，而室温下 $k_B T \sim 25 \text{ meV}$ 。这样可以对Boltzmann因子进行Taylor展开

$$e^{pE \cos \theta / k_B T} = 1 + \frac{pE}{k_B T} \cos \theta \quad (7.22)$$

对角度进行平均，并归一化后得到

$$\langle p \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left( 1 + \frac{pE}{k_B T} \cos \theta \right) p \cos \theta \sin \theta d\theta / 4\pi \quad (7.23)$$

$$= \frac{p^2 E}{3k_B T} \quad (7.24)$$

反比于温度。上述讨论中假定了静电场。事实上，在相当大的频率范围内，这仍然适用，但偶极矩会依赖于外场的频率。在高频时对偶极矩贡献将以下面讨论的诱导偶极矩为主。这个转变发生在GHz~THz附近，是分子转动的特征频率。

另一个情形是一个原子或分子可以被外电场极化，从而产生多极矩。无论极性或非极性分子，都会被外场诱导产生极化。可以做如下的估计。 $a$ 为原子的特征尺寸，原子核施加在电子上的电场为 $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ 。外场为 $E$ ，使得电子的运动产生变形，其大小为 $\frac{\Delta z}{a} \sim \frac{E}{e/4\pi\epsilon_0 a^2}$ 。最低阶的多极矩即偶极矩为 $p = e\Delta z \sim 4\pi\epsilon_0 a^3 E$ 。一般地，在最低阶近似下 $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ ， $\alpha$ 称为原子极化率。例如氢原子 $\alpha/4\pi\epsilon_0 = 0.66 \times 10^{-30} \text{ m}^3$ 。 $\text{CH}_4$ 分子 $\alpha/4\pi\epsilon_0 = 2.6 \times 10^{-30} \text{ m}^3$ 。电场极化导致的多极矩往往要远小于极性分子固有的多极矩。例如 $E = 10^6 \text{ V/m}$ ，在非极性原子中诱导的偶极矩仅为 $10^{-34} \text{ C} \cdot \text{m}$ 。

在此需要交待一下为什么要做多级展开。一个电荷密度分布已经给出了完整的信息，多级展开不过是将这个分布参数化。我们有了两套等价的语言来描述同一个电荷分布：或者用电荷密度或者用多级展开的系数。这有些类似傅立叶变换，对于同一个事件既可以用时域空间也可以用频域空间来表示。两种描述方法完全等价，包含相同的信息。但是如此参数化的好处是不同层级的参数会与外场有不同的相互作用，方便系统地研究外场对一个电荷体系的影响。例如上面分子的例子。如果直接使用电荷密度，我们无法抽象出一个简单的图像。而一旦进行多级展开，我们就对外电场的影响有了一个直观的把握。需要时还可以将这个影响还原到电荷密度分布。这也与傅立叶变换类似，有的时候在频域中的操作有更明确的意义，如滤波。

## 7.2 介电体中的极化

一个中性的介电体由原子、分子组成，没有自由运动的电子。作为空间位置函数的电荷密度在原子尺度上剧烈涨落。如果关注的是宏观场，就需要对这种涨落进行平均。我们将讨论这样一类简单的情形：介电体的宏观场完全来源于外场的诱导，这个外场也具有宏观特征，如长波长的电磁波。在没有外场时，介电体中电荷密度的宏观平均为零，对宏观场的没有贡献。外场会在介电体中诱导出非零的宏观电荷密度。这个诱导出来电荷密度叠加在微观的电荷密度之上，但具有与外场同样的长波长特征，并产生一个叠加在外场上的电场。做平均的一个很直接的方法是进行粗粒化。我们可以把介电体划分成为微观大宏观小的体积元。每个体积元的总电荷保持为零。电荷密度是总电荷除以体积，也为零。这种划分方法对于很多简单的体系容易实现，例如每个体积元中都包含大量的完整的分子。一旦确定了一种划分方法，在施加外场时也要始终保持下来。否则，不同外场下的宏观电荷密度就无法比较。采取这样的方案后，施加的外场就会产生一个分布在空间中的宏观电荷密度 $\bar{\rho}(\vec{r})$ ，这个电荷密度在外场为零时也为零。这意味着我们利用平均消除了本底的电荷密度，而只去关心外场产生的变化。

我们面临的一般问题是给定一个介电体和外场 $\vec{E}_{ext}(\vec{r})$ ，求总电场 $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{E}_{ind}(\vec{r})$ ，其中 $\vec{E}_{ind}$ 是经外场 $\vec{E}_{ext}$ 诱导的由介电体自身产生的电场。已知的方程是 $\nabla \cdot \vec{E} = \bar{\rho}/\epsilon_0$ 。而 $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{ext} + \bar{\rho}_{ind}$ ，其中 $\bar{\rho}_{ext}$ 给定。如果我们能够建立 $\bar{\rho}_{ind}$ 对 $\vec{E}$ 的依赖关系，那么原则上就可以得到方程的解。建立这个关系需要使用一个称为电偶极矩密度的量 $\vec{p}_{dip}$ 作为桥梁。

正如上一节讨论的，电荷密度和多级矩是描述一个电荷体系的两套等价语言。出现在需要解的微分方程 $\nabla \cdot \vec{E} = \bar{\rho}/\epsilon_0$ 中的是电荷密度。但是方便描述电场与分子体系相互作用的语言是多级矩。因此，我们首先还是来研究外场诱导的多级矩变化，然后再还原成电荷密度。这有些像滤波：先将时域信号变换到频域，在频域空间进行滤波，然后再变换回到时域。

为简单起见，只考虑偶极矩。定义电偶极矩密度为  $\vec{p}_{dip} = \sum \vec{p}_i / V$ ，这是一个宏观量， $V$  是进行平均的小体积。我们已经设定无外场时  $\vec{\rho}(\vec{r})$  为零，因此  $\vec{p}_{dip}$  也为零。为了得到  $\vec{\rho}_{ind}$  对  $\vec{E}$  的依赖关系，现在需要解决两个问题： $\vec{p}_{dip}$  与  $\vec{E}$  的关系； $\vec{p}_{dip}$  与  $\vec{\rho}(\vec{r})$  的关系。对于前者，可以做唯像处理。对于弱场，有线性关系

$$\vec{p}_{dip}(\vec{r}) = \int \alpha(\vec{r}, \vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (7.25)$$

这个线性关系可保证  $\vec{E}$  为零时  $\vec{p}_{dip}$  也为零。一般地， $\vec{p}_{dip}$  和  $\vec{E}$  有上述的非局域关系，原因是产生  $\vec{p}_{dip}$  的来源不仅是外场，介电体内其他地方被极化后产生的场也有贡献。但是事实上，人们发现这种非局域效应往往很弱。因此，上述关系常常简化为局域的形式

$$\vec{p}_{dip} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (7.26)$$

$\chi_e$  称为电极化率，是一唯像无量纲量，依赖于具体物质。对于真空  $\chi_e = 0$ 。上式也许更自然的写法是用  $\vec{E}_{ext}$  代替  $\vec{E}$ 。但是，在弱场近似下  $\vec{E}$  线性依赖于  $\vec{E}_{ext}$ ，所以就直接写成了  $\vec{p}_{dip}$  与  $\vec{E}$  的关系。当外场较强时， $\vec{p}_{dip}$  和  $\vec{E}$  之间的关系不再线性，具体关系还需要由实验确定，一般写为

$$\vec{p}_{dip} = \vec{p}_{dip}(\vec{E}) \quad (7.27)$$

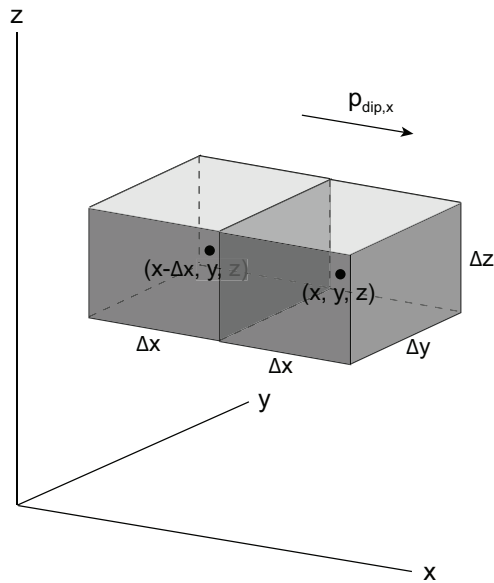


图 7.6:

下面再解决第二个问题：把  $\vec{p}_{dip}$  还原为  $\vec{\rho}$ 。如图，以  $(x, y, z)$  和  $(x - \Delta x, y, z)$  为中心的两个长方体是为得到相应位置宏观量进行平均时使用的体积元。当电偶极矩密度的  $x$  分量从零变为  $\vec{p}_{dip,x}$  时，我们来求  $(x, y, z)$  这个体积元中电

荷量的变化。假设 $\vec{p}_{dip,x}$ 沿正x方向。 $(x, y, z)$ 这个体积元中由极化的x分量引起的电荷量变化有两个来源：一个是极化后移出这个体积元的电荷，一个是极化后从左边那个体积元移入的电荷。先求前者。 $(x, y, z)$ 这个体积元总偶极矩的x分量是 $\vec{p}_{dip,x}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$ 。这个非零的偶极矩可以看做是这个体积元中正电荷整体向x的正向发生了移动。移出的电荷 $Q_-$ 乘以 $\Delta x$ 应该等于总偶极矩的x分量 $\vec{p}_{dip,x}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$ ，所以 $Q_- = \vec{p}_{dip,x}(x, y, z)\Delta y\Delta z$ 。再求从左边移入的电荷 $Q_+$ 。 $Q_+$ 乘以 $\Delta x$ 等于 $(x - \Delta x, y, z)$ 处总偶极矩的x分量 $\vec{p}_{dip,x}(x - \Delta x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$ 。因此 $Q_+ = \vec{p}_{dip,x}(x - \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z$ 。于是，在 $(x, y, z)$ 这个体积元中由 $\vec{p}_{dip,x}$ 贡献的电荷密度为

$$\bar{\rho}_{ind,x}(x, y, z) = \frac{Q_+ - Q_-}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{\vec{p}_{dip,x}(x - \Delta x, y, z) - \vec{p}_{dip,x}(x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{\partial \vec{p}_{dip,x}}{\partial x} \quad (7.28)$$

再考虑y和z分量，得到总电荷密度为

$$\bar{\rho}_{ind} = -\nabla \cdot \vec{p}_{dip} \quad (7.29)$$

如果在介电体内电偶极矩密度均匀，则 $\nabla \cdot \vec{p}_{dip} = 0$ ，各个偶极矩首尾相接，没有电荷的积累。当 $\vec{p}_{dip}$ 出现不均匀时，有可能出现电荷积累，产生如上的极化电荷密度。

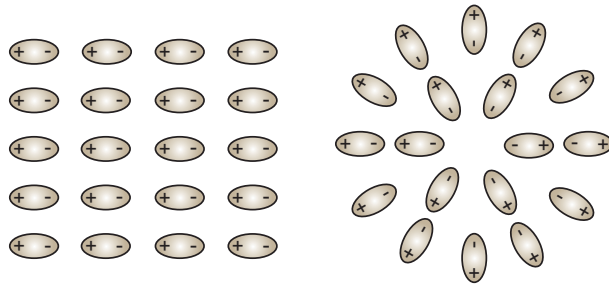


图 7.7:

将诱导的电荷密度代入到 $\nabla \cdot \vec{E} = (\bar{\rho}_{ext} + \bar{\rho}_{ind})/\epsilon_0$ 有

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \bar{\rho}_{ext} - \nabla \cdot \vec{p}_{dip} \quad (7.30)$$

即

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}_{dip}) = \bar{\rho}_{ext} \quad (7.31)$$

已知了 $\vec{p}_{dip}$ 与 $\vec{E}$ 的唯像关系，原则上就可以定出电场。尤其是如果 $\vec{p}_{dip} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ ，会有

$$\nabla \cdot ((1 + \chi_e)\epsilon_0 \vec{E}) = \bar{\rho}_{ext} \quad (7.32)$$

定义  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ , 称为相对介电常数。

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ext} \quad (7.33)$$

对于真空  $\epsilon_r = 1$ 。令  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_{ext} \quad (7.34)$$

已知外部电荷分布, 上式与  $\nabla \times \vec{E} = 0$  一起就可以定出电场。

如果均匀介质充满全空间, 那么上式意味着介质的屏蔽作用相当于将外电荷削减了  $\epsilon_r$  倍。例如充满全空间电介质中的一个点电荷  $q$ 。这个点电荷为外部电荷。由于外部的介质均匀分布, 所以电场为径向, 由  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon}$  可知  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$ 。比没有介质时小。这是因为在  $q$  处会诱导出极化电荷, 其大小为  $\frac{\epsilon-1}{\epsilon}q$ 。极化电荷仅存在于点电荷  $q$  处, 并将其部分屏蔽。

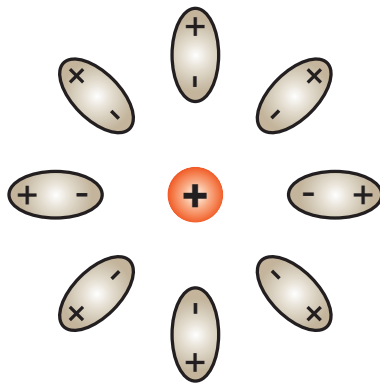


图 7.8:

不均匀的  $\epsilon$  会带来复杂性。考虑一个相对简单的情形: 一块均匀的介电体, 外面是真空, 假设外电荷都在真空中。在边界上,  $\bar{\rho}_{ind} = -\nabla \cdot \vec{p}_{dip}$  中由于电极化密度的突变, 微分运算会带来奇点。一个简单的处理办法是对边界上的一个小体积进行积分以消除奇点。如图, 柱状体积  $dV$  的高度很小, 截面积为  $a$ 。

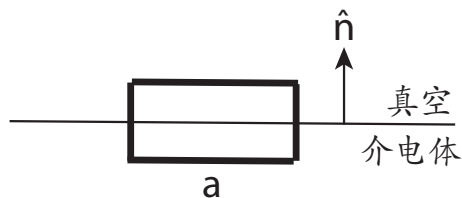


图 7.9:

这个体积内的电荷量为

$$\int -\nabla \cdot \vec{p}_{dip} dV = -\oint \vec{p}_{dip} \cdot d\vec{S} = (\vec{p}_{dip} \cdot \hat{n})a \quad (7.35)$$

于是，在界面上可以将体电荷密度转化为面电荷密度，大小为  $\bar{\sigma} = \vec{p}_{dip} \cdot \hat{n}$ 。对于一维的情形，面密度可以由下图来理解。图中中间的电荷相互抵消，只留下两个端点有非零的电荷。



图 7.10:

由于面电荷密度的存在，在两个介电体的边界上电场的法线分量不再连续，而是代之以  $(\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 0$ 。而同时由于  $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，电场的切线分量仍然连续： $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$ 。

一个简单的例子。上下两块金属极板面电荷密度为  $\sigma$  和  $-\sigma$ 。无介质时，电场为  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 。当极板间充满介电常数为  $\epsilon$  的介电体时，介电体被均匀极化。

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (7.36)$$

介电体内没有极化电荷，极化电荷  $\sigma' = p$  存在于表面上。这时， $\vec{E}_{ind} = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ ， $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - p}{\epsilon_0}$ 。而另一方面， $p = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$ ，于是  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ 。

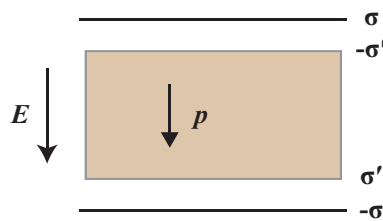


图 7.11:

到目前为止只讨论了偶极矩。事实上，类似可以证明电四极矩密度  $\vec{p}_{quad}$  也对应一个电荷密度来对宏观电势产生贡献，而其在表面上的贡献为一电偶极子层的面密度。一般地，可以定义一个物理量，称为极化强度矢量  $\vec{P}$ ：

$$\vec{P} = \vec{p}_{dip} - \nabla \cdot \vec{p}_{quad} + \dots \quad (7.37)$$

极化强度矢量不仅包括偶极矩，也要包含各阶高阶极矩的贡献。可以证明与 $\vec{P}$ 对应的电荷密度为 $-\nabla \cdot \vec{P}$ 。于是Maxwell方程组中的 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}$ 可以写为

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \bar{\rho}_{ext} \quad (7.38)$$

唯像地，对于线性介质，

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (7.39)$$

以上两式再加上 $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，就可以完全描述宏观静电场。

由于历史原因，电磁学中还引入了一个辅助量 $\vec{D}$ ，称为电位移矢量， $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \bar{\rho}_{ext} \quad (7.40)$$

对于线性均匀介质， $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 。 $\vec{D}$ 的引入不是必须的。

### 7.3 介电体的能量

在没有外场极化介电体时，微观场对应的是晶体的内聚能（结合能）。这个能量唯像地可以用弹性能表达，是内能的一部分。外场极化介质需要对介质做功。这部分功用于克服内聚能来产生电荷的重新分布。改变 $\vec{E}$ 会导致极化电荷的流动。电荷连续性方程 $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，而 $\bar{\rho} = -\nabla \cdot \vec{P}$ ，所以有 $\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ 。由于 $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$ 时 $\vec{J} = 0$ ，因此去掉了任意项。

电场对晶体内参与形成极化电荷所做功的功率为 $\rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}$ ， $\vec{E}$ 包括外电场和偶极子的场。这部分功用于改变极化电荷的动能和势能。由此导致的介电体内能密度 $u_p$ 的变化率为

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (7.41)$$

从而 $du_p = \vec{E} \cdot d\vec{P}$

这是极化后电介质内能的变化，这个能量中不包含外场的能量。





## 8 磁介质

现在来讨论关于静磁场的两个方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (8.2)$$

与介电体类似，有外磁场作用下，物质会产生响应，其结果往往是产生感生的磁场。我们将关注的是总磁场

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{self} \quad (8.3)$$

这里用的是 $\vec{B}_{self}$ ，而不是 $\vec{B}_{ind}$ 。原因是很多物质，如铁磁体，即使没有外磁场磁化其自身也会产生磁场。

首先来看微观上物质对磁场的响应。磁场来源于电流。这个电流可以是各种各样的电荷的运动行为，如金属中电子的定向流动、原子中电子的轨道运动等。后者可以看做一个磁偶极子。磁场对运动的电荷施加作用力，从而与物质相互作用。在此，我们只关心电子做局域运动的情形。

### 8.1 磁偶极矩

我们来看一个任意形状电流环的矢量势

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (8.4)$$

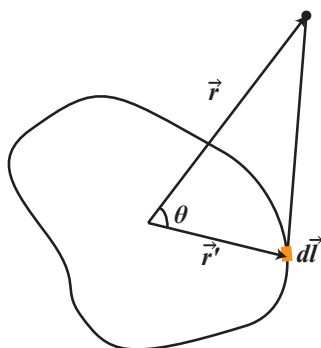


图 8.1:

假设  $r \gg r'$ , 对  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  展开:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \quad (8.5)$$

$$= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \dots \right) \quad (\text{只保留到二阶}) \quad (8.6)$$

于是

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} \left( 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \dots \right) d\vec{r}' \quad (8.7)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left( \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{单极}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} r' \cos \theta}_{\text{偶极}} + \dots \right) d\vec{l}' \quad (8.8)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta d\vec{l}' + \dots \right) \quad (8.9)$$

第一项  $\oint d\vec{l}' = 0$ , 磁单极矩恒为0。这本质上来源于  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (隐含在  $\vec{A}$  中), 右侧为零意味着无源。

最主要的项是磁偶极矩:

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}' \quad (8.10)$$

利用Stokes定理的一个变形:  $\nabla \psi \times d\vec{S} = -\oint \psi d\vec{l}'$ , 令  $\psi = \hat{r} \cdot \vec{r}'$ , 容易证明  $\nabla'(\hat{r} \cdot \vec{r}') = \hat{r}$ 。于是,

$$\oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l}' = - \int \nabla'(\hat{r} \cdot \vec{r}') \times d\vec{S} = -\hat{r} \times \int d\vec{S} = -\hat{r} \times \vec{S} \quad (8.11)$$

$d\vec{S}$ 和 $d\vec{l}'$ 的方向通过电流用右手定则确定。 $\vec{S}$ 为面积矢量, 定义为  $\int d\vec{S}$ 。这样

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (-\hat{r} \times \vec{S}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (8.12)$$

$\vec{m} = I\vec{S}$ , 称为磁偶极矩。

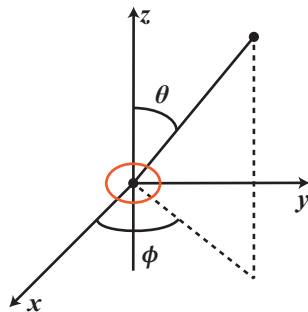


图 8.2:

由 $\vec{A}$ 可以求出 $\vec{B}$ 。将一磁偶极子置于原点，并取 $\vec{m} = m\hat{z}$ 。

$$\vec{m} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & m \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \frac{mx}{r}\hat{y} - \frac{my}{r}\hat{x} \quad (8.13)$$

所以，

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 my}{4\pi r^3}\hat{x} + \frac{\mu_0 mx}{4\pi r^3}\hat{y} \quad (8.14)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mxz}{r^5} \quad (8.15)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3myz}{r^5} \quad (8.16)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3z^2 - r^2)}{r^5} \quad (8.17)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (8.18)$$

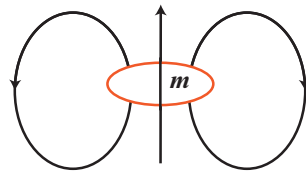


图 8.3:

可得到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (8.19)$$

也可写为  $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m})$

这里

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (8.20)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad (8.21)$$

Lorentz力给出磁场力为 $q\vec{v} \times \vec{B}$ ，写成电荷密度的形式为 $\rho \vec{r} \times \vec{B} d\vec{r}$ ，而 $\rho \vec{v} = \vec{j}$ ，所以一个电流体系受到的磁场力为 $\int d\vec{r} \vec{j} \times \vec{B}(\vec{r})$ 。磁场力对电荷做的机械功为0： $\vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$ 。

对于一个磁偶极子，如果外磁场均匀：

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I(\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0 \quad (8.22)$$

不受力。不加证明地，力矩为

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.23)$$

如果外磁场不均匀，可以证明，

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (8.24)$$

对于静磁场，

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (8.25)$$

## 8.2 原子的磁偶极矩

原子中的电子做轨道运动，角动量  $L = m_e v r$ 。电流的大小为  $\frac{ev}{2\pi r}$ （电流是单位时间通过的电荷量， $e\pi r/v$  是运动周期）。于是磁矩  $m = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m_e} L$ 。考虑到方向

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (8.26)$$

这个关系相当普遍，在量子力学中也成立（系数略作修改）。

类似介电体，我们可以定义一个磁偶极密度，称为磁化强度

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_i / V \quad (8.27)$$

与介电体类似，一个没有固定磁偶极矩的原子或分子可以被外场诱导出磁偶极矩。一个具有固有磁偶极矩的原子或分子在外场下发生转动。当然固有磁偶极矩的大小在外场诱导下也可能会改变，但这个效应通常比固有磁偶极矩带来的要小很多，因此不准备考虑。这样就有两个效应：无固有磁偶极矩的原子被磁场诱导出磁偶极矩以及固有磁偶极矩在外磁场下的转动。

无固有磁矩的原子（如满壳层原子）中，考虑电子在外磁场下的运动方程。1T磁场时电子的Larmor频率大约为  $10^{10}$  Hz量级。Larmor定理中第二项与库仑力  $F$  的比值为

$$\frac{m_e \Omega_L^2 a}{F} \sim \frac{m_e \Omega_L^2 a^2}{F a} \quad (8.28)$$

其中  $a$  为原子半径。 $F a$  的大小为 eV 量级，而分子为  $10^{-10}$  eV 量级。因此第二项可以忽略。于是我们看到，在转动参考系中，原子中的电子遵循与无磁场时实验室参考系中相同的运动方程。假定磁场与电子轨道平面垂直。如果电子轨道角速度与磁场同向，那么在实验室参考系中，磁场使得电子运动的角速度增加了  $eB/2m$ 。如果电子轨道角速度与磁场反向，则角速度减少了  $eB/2m$ 。两种情况下，轨道半径都不变。因此对于电子轨道角动

量  $L = m_e \omega r^2$ , 当电子轨道角速度与磁场同向时,  $L$  增加  $eBr^2/2$ , 否则减少  $eBr^2/2$ , 其变化总是平行于磁场。对于磁矩, 一般有

$$\delta \vec{m} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \vec{B} \quad (8.29)$$

磁矩的变化总是反平行于磁场。

一个本没有磁矩的分子在外场诱导下会出现这样一个磁矩。这个磁矩与外场方向相反, 其产生的磁场倾向于抵消外磁场。这种效应称为抗磁性。一般地, 在磁场作用下, 一个原子 (或离子) 都会诱导出一个相反磁场的磁矩。这是一个普遍的现象, 不仅限于无固有磁矩的原子。只是固有磁矩具有的所谓顺磁性一般地会远大于抗磁性。下面讨论顺磁性。

一个原子的固有磁矩一般可以写为 (不考虑自旋)

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (8.30)$$

外磁场施加的力矩为  $\vec{m} \times \vec{B}$ , 倾向于将  $\vec{m}$  与  $\vec{B}$  平行排列。于是诱导的磁场与外磁场平行, 称为顺磁性。与电介质类似, 热平均后一个原子的磁矩  $\sim \frac{m^2}{k_B T} B$ 。

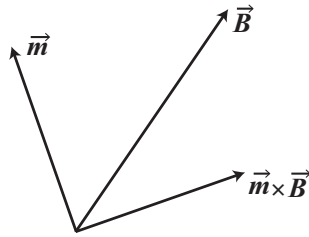


图 8.4:

与抗磁性比较:  $\frac{e^2 r^2}{4m_e} / \frac{m^2}{k_B T} = \frac{e^2 r^2}{4m_e} / \frac{e^2 v^2 r^2}{4k_B T} = \frac{k_B T}{mv^2}$ , 分母是电子的动能在 eV 量级, 而室温下  $k_B T \sim 0.025 \text{ eV}$ 。因此顺磁性远大于抗磁性, 除非固有磁矩为 0, 没有顺磁性。

电子除轨道运动贡献顺磁性外, 还有自旋。自旋角动量为  $\vec{S}$ , 对磁矩的贡献是  $-\frac{e}{m_e} \vec{S}$ 。量子力学会告诉我们一个原子的磁矩为  $\vec{m} = -g(\frac{e}{2m_e}) \vec{J}$ 。  $\vec{J}$  是包括轨道和自旋的总角动量。  $g$  称为 Lande 因子。对于纯轨道角动量  $g = 1$ , 对于纯自旋角动量  $g = 2$ ,  $\vec{J}$  对于一类原子 (离子) 是内禀的已知物理量。

可以做一小结, 来看看各种不同的电子对磁性能的贡献是怎样的。原子的内层电子均为满壳层, 所以  $\vec{L} = 0$ 。每个轨道上有自旋相反的两个电子, 所以  $\vec{S} = 0$ 。因此, 总的  $\vec{J} = 0$ 。所以内层电子只贡献抗磁性。外层电子如为满壳层, 也只有抗磁性, 如  $\text{F}^-$ ,  $\text{He}$ ,  $\text{Li}^+$  等。对于电子的轨道运动, 抗磁性总是

存在的，包括外层电子。但外层电子如果  $\vec{J} \neq 0$ ，则可能会有顺磁的贡献。原子或分子中经常会出现电子对（如形成化学键）。这时  $\vec{S} = 0$ ，但可能还有轨道的贡献。一般地，永久磁矩经常来源于未配对电子的自旋或者电子的轨道运动。如果一个原子有奇数个电子，那么一定有一个未配对电子，从而有顺磁性。即使有偶数个电子，但有未占据的轨道，仍然有顺磁性，如3d的过渡金属原子，4f的稀土金属原子。大多数情况下，分子没有永久磁矩，因为形成了电子配对的化学键。有些分子如NO，有15个电子，是顺磁的。

物质被磁化后，出现不为0的  $\vec{M}$ 。类似于介电体， $\vec{M}$ 对应于体电流密度  $\nabla \times \vec{M}$ 和面电流密度  $\vec{M} \times \hat{n}$ 。

面电流密度如图所示。假设均匀磁化，则内部电流彼此抵消，电流只存在于表面上。单位面积的磁矩为  $M$ 。每个小磁矩面积为  $a$ ，高为  $h$ 。于是磁矩为  $m = Ia$ 。同时  $m = Mah$ ，这样  $I = Mh$ ，面电流密度  $= \frac{I}{h} = M$ 。

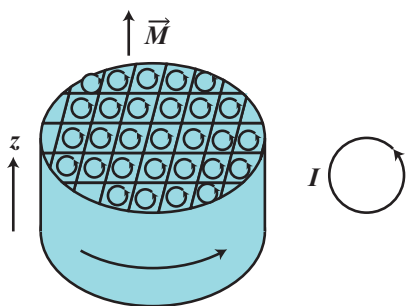


图 8.5:

以上是磁化均匀的情形。当磁化不均匀时，内部的电流一般不再会抵消。如图，左右两块  $M_z$  不同，因而电流也不同。在两块相连的那个面上，两边的电流的差值就是静电流沿  $x$  方向的大小。

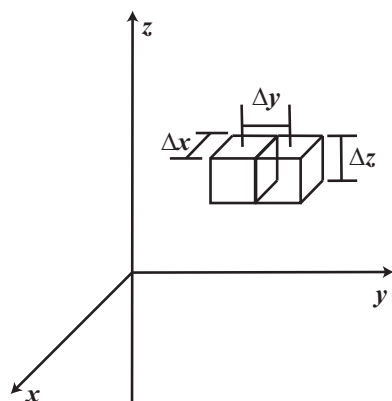


图 8.6:

$$I_x = (M_z(y + \Delta y) - M_z y) \Delta z = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z \quad (8.31)$$

类似可以得到  $M_y$  的不同带来的  $I_x$  为  $-\frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta y \Delta z$ 。于是,  $I_x = (\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}) \Delta y \Delta z$ 。而面积为  $\Delta y \Delta z$ , 因此  $j_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$ 。一般地,  $\vec{J} = \nabla \times \vec{M}$ 。

对于静磁学, 体电流密度  $\nabla \times \vec{M}$  和面电流密度  $\vec{M} \times \hat{n}$  是稳恒电流,  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 。  $\vec{B}_{self}$  由  $\nabla \times \vec{M}$  和  $\vec{M} \times \hat{n}$  产生的。于是

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{ext} + \vec{J}_{dip}) \quad (8.32)$$

$\vec{J}_{ext}$  为外部电流。  $\vec{J}_{dip}$  为介质自身磁偶极子对应的电流。将  $\vec{J}_{dip} = \nabla \times \vec{M}$  代入得到

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{ext} + \nabla \times \vec{M}) \quad (8.33)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{ext} \quad (8.34)$$

可以定义一个量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.35)$$

称为磁场强度, 有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} \quad (8.36)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (8.37)$$

$\vec{H}$  类似于  $\vec{D}$ , 是个辅助场, 不是必须的。但  $\vec{H}$  很有用 (相比  $\vec{D}$  而言), 原因来自于实际应用。在讨论电学应用时, 一般地我们会已知电势而不是电荷, 电势直接与  $\vec{E}$  相关, 而不是  $\vec{D}$ 。在讨论磁学应用时, 通常我们给出的是外部的电流 (如电磁铁), 这个电流与  $\vec{H}$  直接相关。

对于线性介质,  $\vec{M} \propto \vec{H}$ 。定义  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 。  $\chi_m$  是一个无量纲的数。顺磁介质  $\chi_m > 0$ , 典型的大小是  $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 。抗磁介质  $\chi_m < 0$ , 典型的大小是  $10^{-5}$ 。  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$ 。定义  $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ , 有  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 。

给定外电流和介质, 场的分布可以通过解边值问题得到。由于  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{B}$  在界面上的垂直分量连续。由于  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ ,  $\vec{H}$  在界面上  $\vec{H}_2'' - \vec{H}_1'' = \vec{K} \times \hat{n}$ ,  $\vec{K}$  为面电流密度。

例

一个同轴电缆, 内外导体电流为  $I$ , 电流密度均匀分布, 绝缘层的  $\chi_m$  已知。



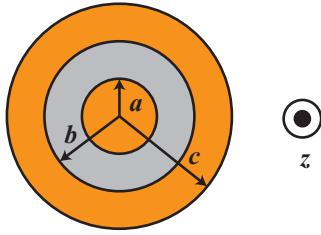


图 8.7:

内外导体的电流密度分别为

$$\vec{J}_i = \frac{I\hat{z}}{\pi a^2} \quad (8.38)$$

$$\vec{J}_o = \frac{-I\hat{z}}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (8.39)$$

由于对称性  $\vec{H} = H(\rho)\hat{\phi}$ 。取逆时针的圆回路，利用  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ ，可分别得到

$$H(\rho) = \frac{I\rho}{2\pi a^2}, \quad \rho \leq a \quad (8.40)$$

$$H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}, \quad a \leq \rho \leq b \quad (8.41)$$

$$H(\rho) = \frac{I(c^2 - \rho^2)}{2\pi(c^2 - b^2)}, \quad b \leq \rho \leq c \quad (8.42)$$

$$H(\rho) = 0, \quad \rho \geq c \quad (8.43)$$

可以验证以上解满足界面上的边界条件。

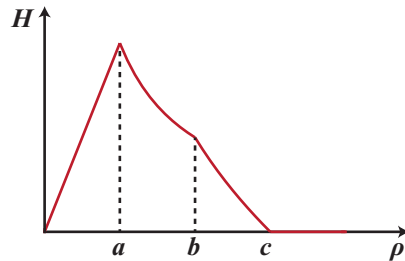


图 8.8:

在导体中  $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ 。在绝缘层中， $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$ 。由此绝缘层中的  $\vec{M} = \chi_m \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi}$ 。容易验证  $\nabla \times \vec{M} = 0$ ，因此体内没有电流。在两个界面上面电流密度为  $\vec{M} \times \hat{n}$ 。在半径为  $a$  的内表面， $\hat{n} = -\hat{\rho}$ ， $\vec{K} = \vec{M} \times (-\hat{\rho}) = \chi_m \frac{I}{2\pi a}\hat{k}$ 。在半径为  $b$  的外表面， $\hat{n} = \hat{\rho}$ ， $\vec{K} = \vec{M} \times \hat{\rho} = -\chi_m \frac{I}{2\pi b}\hat{k}$ 。内外表面上的总电流都是  $\chi_m I$ 。

至此为止，我们所讨论的介质在没有外场时就没有磁矩。即使每个原子有固有磁矩，但无外场时，其分布的方向是无规的，因此 $\vec{M} = 0$ 。然而，对于有些物质，原子之间有很强的关联，可以使其固有磁矩具有一定的方向性。即使没有外场， $\vec{M}$ 也不为0。我们称这种物质具有铁磁性。例如，Fe、Co、Ni金属以及SmCo等合金。铁磁体都有一个特征温度，称为Curie温度 $T_c$ 。例如，Fe的 $T_c = 1043$  K、Co的 $T_c = 1388$  K、Ni的 $T_c = 627$  K。在 $T_c$ 之上表现为顺磁性。到达 $T_c$ 后发生相变，低温下为铁磁相。

以Fe为例，其3d轨道上有6个电子。按照洪特规则（Hund's rule），轨道占据方式为 $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$ ，5个d轨道上有4个是单占据。如不考虑轨道角动量的贡献（由于晶体场的存在，这部分角动量对于磁矩的贡献常常被淬灭），一个铁原子会贡献四个电子自旋的磁矩。一个电子的 $\vec{m} = -\frac{e}{m_e}\vec{S}$ ，自旋 $\vec{S}$ 是量子化的，取值为 $\hbar/2$ 。于是一个电子的磁矩是 $\frac{e\hbar}{2m_e}$ ，定义波尔（Bohr）磁子 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ 。一个Fe原子对磁矩有四个Bohr磁子的贡献。

原子磁矩之间的相互作用主要是静电力，而不是磁矩-磁矩间的相互作用。这种静电耦合（也称交换作用）具有纯量子力学的来源。磁矩间相互作用的大小可做如下估计，磁矩间相互作用能 $\sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^3}$ ， $m \sim \mu_B \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ， $r \sim 10^{-10} \text{ m}$ ，能量 $\sim 10^{-4} \text{ eV}$ ，远远低于室温，因此不可能使原子磁矩在室温下排列成有序结构。由于原子间有起源于量子力学的所谓交换作用，原子的磁矩有可能排成有序的结构，具有铁磁性。我们已经讨论了出现铁磁性的两个要素：原子本身具有磁矩、电子间的交换相互作用。还有一个要素：各向异性。如果没有各向异性，磁矩就有可能取任意方向。但一般地一个铁磁体的磁化方向总有几个能量最低的取向，其来源是电子的自旋-轨道相互作用。晶格的各向异性导致了自旋取向的各向异性。

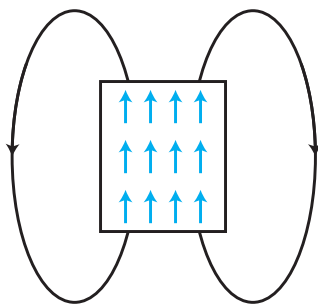


图 8.9:

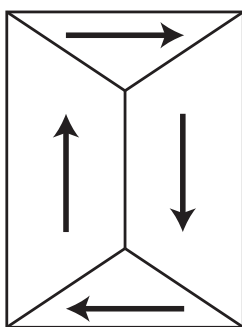


图 8.10:

有了以上三个要素后，在 $T_c$ 之下，一个铁磁体在没有外磁场的情况下会出现磁有序结构。但是事实上，如果没有外磁场磁化，一个铁磁体通常表现不出宏观磁场。其原因是一个铁磁体中会出现很多磁畴。如图，每个磁畴内部磁矩有序排列，但畴之间的排布方式倾向于将磁场相互抵消。出现磁畴的原因是前面忽略的偶极矩间的纯磁性相互作用。起源于量子力学的交换作用非常短程，随距离呈指数衰减，一般只存在于近邻原子间。但磁偶极作用要长程得多，在宏观尺度上就不能忽略了。偶极作用倾向于将磁矩反向排列以降低能量，因此与铁磁的交换作用是竞争关系。当一个磁畴大到一定尺寸后，偶极作用开始发挥明显的作用，产生如图的结构。各磁畴的磁矩通常排列成一定的形式以降低总体能量。即使温度在 $T_c$ 之下，仍然没有宏观磁场。为了使一个铁磁体出现宏观磁性，需要进行磁化。在外磁场下，某些磁畴的能量更低些。这会导致一个磁畴的磁化方向的整体转动。也可能使磁畴间的所谓畴壁发生移动，使得能量低的磁畴吃掉能量高的，最终出现宏观磁场。当外磁场撤去后，材料中存在的各种杂质会将畴壁钉扎住，不会都回到最低能量状态，从而仍然有磁场产生。在机械振动等作用下，磁铁还可以退磁，回到能量最低的状态。

如图是一个常见的磁化曲线，称为磁滞回线。

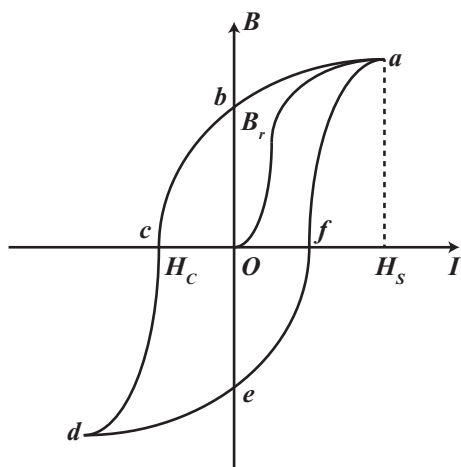


图 8.11:

测量这条曲线的装置如图所示

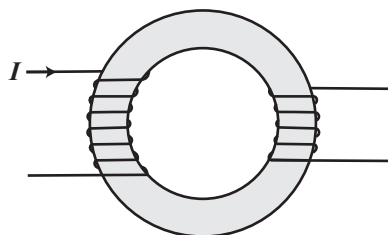


图 8.12:

由安培定律  $H = nI$ ,  $n$  为单位长度的匝数。右边的线圈可以通过 Faraday 感应定律得到  $B$ 。从  $I = 0$  出发, 起始磁化曲线为  $Oa$ , 非线性。这条曲线上经历了磁畴的转动和畴壁的移动。到达  $a$  点后达到饱和。再增加  $H$ ,  $B$  几乎不再增加, 曲线几乎变平。这时降低  $H$ , 曲线不会沿原路返回而是到达  $b$  点。这时即使没有外界磁化, 材料仍有很大的  $M$ , 称为剩磁  $B_r$ 。之后再反向磁化。当外电流反向增加到一定值时 ( $c$  点),  $B$  变为 0,  $H_c$  称为矫顽力。对于一个永磁体, 希望有比较大的  $B_r$  和  $H_c$ 。  $H_c$  大可以防止被轻易退磁。  $H_c$  很大的磁体称为硬磁材料。软磁材料  $H_c$  很小。

对于一个永磁体, 如果知道  $\vec{M}$ , 就可以利用  $\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  得到磁场。例如, 如图圆柱条形永磁体。假设  $\vec{M}$  为常量, 那么其磁场就是一个面电流密度为  $M$  的螺线管的磁场。

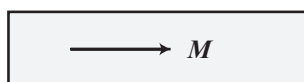


图 8.13:

铁磁物质的 $B$ 和 $H$ 呈非线性关系，但也可以定义一个 $\mu = B/H$ 。通常 $\mu/\mu_0$ 会很大，因为这时同样一个外场会使很多自旋一同运动。如图，在边界上 $B$ 的垂直分量连续，而 $H$ 的水平分量连续（因为无外电流），同时有 $B = \mu H$ 。由于铁磁材料 $\mu$ 很大，于是在铁磁一侧磁力线会被极大地束缚在体内。

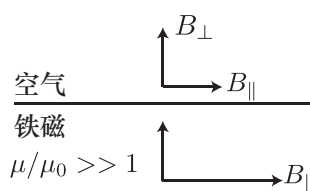


图 8.14:

如图这样一个线圈，磁通量几乎被约束在铁芯中。这个效应在变压器等设备上有重要的应用。

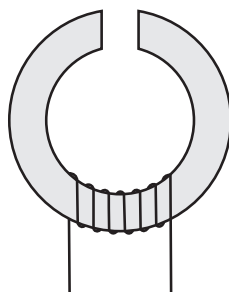


图 8.15:

又如下图中的磁屏蔽效应。 $\mu$ 很大的材料可以屏蔽外磁场。

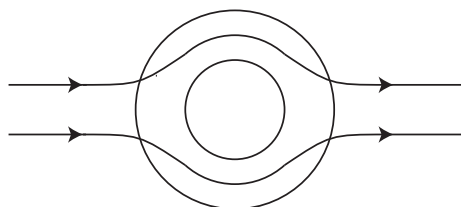


图 8.16:

最后讨论磁介质的能量。磁化过程中的磁化电流为 $\nabla \times \vec{M}$ ，并注意到Lorentz力不做功，因而磁化过程导致的内能变化是

$$\frac{du_M}{dt} = (\nabla \times \vec{M}) \cdot \vec{E} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{M} + \nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{E}) \quad (8.44)$$

最后一项全空间积分为0，而 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ，所以

$$\frac{du_M}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{M} \quad (8.45)$$

即

$$du_M = -M \cdot d\vec{B} \quad (8.46)$$



## 9 介质中的电磁波

再来看有介质时的非静态场。将完整的Maxwell方程组进行平均，有了如下方程

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext} \quad (9.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.4)$$

这里电流项不仅包括 $\vec{J}_{ext}$ ，因此需要对第四个方程进行改造。除 $\vec{J}_{ext}$ 和 $\nabla \times \vec{M}$ 外，电流还有第三个来源： $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ 。这在前面讨论介电体能量时已经给出。产生这个电流的电荷并不能在固体中迁移，但会局域地产生位移，称为位移电流。于是

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{ext} + \mu_0 \nabla \times \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.5)$$

将 $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ 和 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 代入，整理后

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.6)$$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 也称为位移电流。

在介质中，无源的场方程是

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (9.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (9.10)$$

以及 $D = \epsilon \vec{E}$ 和 $H = \vec{B}/\mu_0$ 。



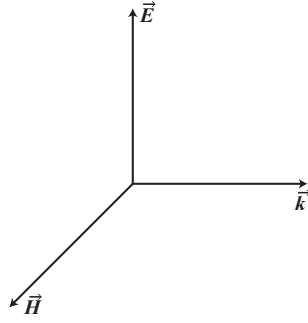


图 9.1:

将平面波

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) \quad (9.11)$$

$$\vec{H} = H_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t) \quad (9.12)$$

代入, 得到  $\omega = \frac{kc}{n}$ , 其中  $n = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ , 称为折射率。

以上的讨论假设了一件事:  $\epsilon$ 和 $\mu$ 和频率无关。这时 $D$ 和 $E$ 、 $H$ 和 $B$ 有简单的关系。电磁波的相速度 $c/n$ 也与频率无关。这种介质称为无色散。但一般地,  $\epsilon$ 和 $\mu$ 代表介质对外场的响应, 对频率有依赖性。这种依赖性来源于一个系统对外界的响应往往不是瞬时的。这种非瞬时性来源于惯性, 而非场的有限传播速度。例如谐振子, 其位移与驱动力之间存在相位差, 并且相位差依赖于频率。运动方程:

$$\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0 x = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad (9.13)$$

解为

$$x(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad (9.14)$$

电偶极矩  $p(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$ , 因此  $\chi_e$  依赖于频率。

含时后, 一般地

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^t f(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (9.15)$$

Fourier变换

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (9.16)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{D}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (9.17)$$

略去详细推导，可以有

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \hat{E}(\vec{r}, \omega) \quad (9.18)$$

其中  $\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt$

类似地,  $\vec{H}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\hat{\mu}(\omega)} \hat{B}(\vec{r}, \omega)$ 。

对于单一频率，将时间依赖关系代入无源的Maxwell方程组

$$\nabla \cdot \hat{D} = 0 \quad (9.19)$$

$$\nabla \times \hat{E} = i\omega \hat{B} \quad (9.20)$$

$$\nabla \cdot \hat{B} = 0 \quad (9.21)$$

$$\nabla \times \hat{H} = -i\omega \hat{D} \quad (9.22)$$

平面波解  $\hat{u}(\vec{r}, \omega) = \hat{u}_0(\omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  为场的任一分量。代入到上式，得到

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (9.23)$$

即

$$k = \frac{n}{c} \omega \quad (9.24)$$

令  $k = k' + ik''$ ，有  $k' = \frac{n'}{c} \omega$ 。  $n'$  为  $n$  的实部。相速度  $v_p = \frac{c}{n'}$ 。

介质是一个电荷体系，其产生的场也以  $c$  为传播速度。为什么会出现小于  $c$  的相速度？前面讨论了一个关于极化的简单模型，受迫谐振子， $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$ 。在  $\omega < \omega_0$  时，由偶极子产生的场会落后一个相位。电磁波穿过介质后的场是外部电荷产生的场与介质电荷产生的场的叠加。

$$e^{ikx - i\omega t} + i\delta e^{ikx - i\omega t} \approx e^{ikx - i\omega t + i\delta} \quad (9.25)$$

相移  $\delta$  会使得出射的波看上去在介质中经历了更长或更短的时间。

但是毕竟介质也不过是一个电荷体系。电磁场总是以光速传递相互作用的信息。解决这个矛盾的关键是相速度并不是相互作用传递的速度。真正的相互作用的传递速度仍然是  $c$ ，无论是否有介质。这时需要考虑的速度是波前的速度。这个速度并不是波包的速度。Sommerfield曾讨论过这样的问题：一个波包的波前在  $t = 0$  时进入到介质中，处于  $z$  处的观察者多长时间后能测到非零的场？答案是  $z/c$ 。传递相互作用的速度一直都是  $c$ 。

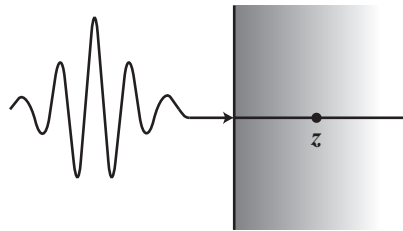


图 9.2:

我们来关心介质中能量以什么样的速度传播。由于介质的存在，一般地这个速度不等于 $v_p$ ，其原因如下。考虑介质中相邻的两个位置，能量从 $A$ 传到 $B$ 。在能量传递过程中，并不是所有的时间里 $A$ 都在对 $B$ 做正功，因而能量的传递与相位相比不同，通常速度会慢些。为了得到能量传递的速度，需要仔细地计算之前曾经考虑过的能量守恒方程。得到能量密度 $u$ 和能量通量（Poynting矢量） $S$ 。能量传递速度 $v_g = \frac{\langle S \rangle}{\langle u \rangle}$ ，又称为群速度，因为这个速度正好又是波包的传播速度。 $\langle S \rangle$ 和 $\langle u \rangle$ 分别是时间的平均。

为计算方便，略去 $\vec{E} \cdot \vec{j}$ 项，能量守恒关系：

$$\nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.26)$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (9.27)$$

由于色散的存在，能量密度不能再写为 $\frac{1}{2}\epsilon\bar{E}^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ 。例如做时间微分 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 时需要 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 的一般关系。略去数学推导，可以证明对于一个单色波，忽略吸收（ $\hat{\mu}, \hat{\epsilon}$ 为实）

$$\langle S \rangle = v_p \left( \frac{1}{2}\hat{\epsilon}\langle \bar{E}^2 \rangle + \frac{1}{2}\hat{\mu}\langle H^2 \rangle \right) \quad (9.28)$$

$$\langle u \rangle = \left( \frac{1}{2}\hat{\epsilon}\langle \bar{E}^2 \rangle + \frac{1}{2}\hat{\mu}\langle H^2 \rangle \right) \frac{d \ln(\omega n)}{d \ln \omega} \quad (9.29)$$

这里 $\hat{\epsilon}$ 、 $\hat{\mu}$ 和 $n$ 都是 $\omega$ 的函数，忽略吸收，它们都是实数，于是能量传播速度

$$v_g = \frac{\langle S \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{v_p}{\frac{d \ln(\omega n)}{d \ln \omega}} = \frac{c}{n} \frac{\frac{1}{\omega} d\omega}{\frac{1}{\omega n} d(\omega n)} = c \frac{d\omega}{d(\frac{\omega n}{c})} = \frac{d\omega}{dk} \quad (9.30)$$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ 是一个单色波的能量传播速度，并不一定需要通过构造波包得到。在以上推导中用到了关于 $\omega$ 的Taylor展开，并只取得一阶微分项。如果色散关系对 $\omega$ 变化比较剧烈，上述推导不再适用。这时往往会出现 $v_g > c$ ，此时 $v_g$ 也不再能用来表达能量传播速度。

## 10 电路

迄今为止，我们已经讨论了电磁场的宏观物理。这时物理量的空间特征尺寸远大于原子尺度。现在再考虑另一个空间尺度：物体的线度。当电磁场的特征尺度远大于物体的线度时，我们会用一套新的语言来描述其中的物理。

我们设定这样一个场景：（1）真空中的一些导体组成一个网络，其中的电子在外界驱动力（电动势）作用下运动。（2）导体之外无电荷。（3）导体非磁性，并忽略磁化。（4）不考虑介质。这个场景是对电路的抽象和简化。电路中的元件看做一系列导体，它们组成一个网络。

在真空中有

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (10.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.4)$$

之前在讨论导体静电学时曾经提到过，导体中电荷密度的弛豫时间为 $10^{-15}$  s。如果所讨论问题的时间尺度远长于这个弛豫时间，那么可以认为导体内部电荷密度处处为零。于是，在导体中有

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (10.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.7)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.8)$$

系统的特征长度为 $l$ ，电磁场的特征时间为 $\tau$ 。由第二个和第四个方程分别可知

$$\frac{\vec{E}}{l} \sim \frac{\vec{B}}{\tau} \quad (10.9)$$

$$\frac{\vec{B}}{l} \sim \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2 \tau} \vec{E} \quad (10.10)$$

由此二式得到  $\bar{E} \sim \frac{\mu_0 J l}{\tau(1 - \frac{l^2}{c^2 \tau^2})}$ 。下面来看位移电流与真实电流的比值

$$\frac{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}}{\mu_0 J} \sim \frac{\bar{E}}{\mu_0 J} = \frac{\bar{E}}{\mu_0 J c^2 \tau} \sim \frac{\mu_0 J l}{\tau(1 - \frac{l^2}{c^2 \tau^2})} \frac{1}{\mu_0 J c^2 \tau} = \frac{l^2 / c^2 \tau^2}{1 - l^2 / c^2 \tau^2} = \frac{1}{\frac{c^2 \tau^2}{l^2} - 1} \quad (10.11)$$

当  $c\tau/l \gg 1$  时, 上式远小于1, 即  $l \ll c\tau \sim \lambda$  时,  $\lambda$  为波长, 位移电流可以忽略。这个条件意味当电磁场的波长远大于系统线度时, 推迟效应就可以忽略, 相互作用的传递速度可以取作无穷大。我们称这种情形为准静态场。做一个数值的估计, 对于1 cm (许多应用中器件的尺度) 的线度, 场的传播时间  $\sim 10^{-10}$  s, 如果频率  $\ll 1$  GHz, 就可以做准静态近似。这时只需要考虑法拉第电磁感应。导体中的方程是

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (10.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (10.15)$$

真空中  $J = 0$ 。这意味着我们仍然可以使用Biot-Savart定律计算磁场。

导体网络中的导体可以做成各种形状, 称作电路。电路的用途在于信息处理, 即将输入信号按照要求换变为输出信号。根据电磁学中对各个可观测量的定义, 电流是最容易直接测量的, 因此往往用电流来代表信号。电路中的单元称为元件。这些元件中的一类称为无源元件, 主要包括电阻、电容、电感。它们的尺度都在厘米量级, 在低频情况下可以做准静态近似。可以证明对于一大类信息处理问题, 所需电路可以由电阻、电容、电感构造出来。

由于法拉第电磁感应效应, 电场不再无旋, 因此不能定义电势。这时电场对于一个路径的积分一般会依赖于路径。所以在用仪表测量一个元件两端的电压降时, 读数会依赖于具体的走线方式。当然如果频率很低时, 这个效应并不明显。设计电路板时, 人们需要考虑电磁感应, 往往需要进行仿真计算来得到输入和输出电流间的真实关系。元件的标称值可以用作零级近似的电路分析。但真实的电路需要考虑电磁感应。电磁感应等效应在很多场合会被认为是噪音的来源。

静态场下定义的电阻值  $R$  在交流电路中严格意义下只是名义上的。当然如果频率不高时电压降的测量结果 (依赖于具体走线) 与电流的比值应该比较接近  $R$ 。当频率较高时, 由于所谓趋肤效应, 电流密度在电阻中的分布会与直流时有明显不同, 同时电导率也会随频率发生变化, 因此电压降与电流的比值会依赖于频率。

再考虑电容。对于导体系统, 静电势  $\bar{\phi}$  满足方程  $\nabla^2 \bar{\phi} = 0$ 。由该方程的数学性质可以证明如下定理。

唯一性定理：对于一组给定 $\phi_k$ 或 $Q_k$ 的导体，导体之外的空间中 $\phi(\vec{r})$ 唯一确定。

唯一性定理告诉我们如果找到了一个 $\nabla^2\phi = 0$ 的解，它在每个导体上满足给定的电势或总电荷这样的边界条件，那么这个解就是唯一的。我们来看由此可以得到哪些推论。

作为一个边界条件，取无限远处电势为0。如果只有一个导体，并假设其电势为0，那么可以得出 $\phi$ 处处为0。这是因为 $\phi(\vec{r}) = 0$ 满足方程 $\nabla^2\phi = 0$ 以及无限远处和导体上的边界条件。由唯一性定理可知这是唯一的解。

如果这个导体上的电势 $\phi_0 \neq 0$ ，则一般地 $\phi(\vec{r}) \neq 0$ 。导体上的电荷 $Q = -\epsilon_0 \int \nabla\phi \cdot d\vec{a}$ 。现在将 $\phi_0$ 改变 $\lambda$ 倍： $\phi_0 \rightarrow \lambda\phi_0$ 。这时 $\lambda\phi$ 满足 $\nabla^2(\lambda\phi) = \lambda\nabla^2\phi = 0$ 以及导体上电势为 $\lambda\phi_0$ 的边界条件。由唯一性定理可知 $\lambda\phi(\vec{r})$ 是新的边界条件下电势的解。此时导体上的总电荷 $-\epsilon_0 \int \nabla(\lambda\phi) \cdot d\vec{a} = \lambda Q$ 。于是我们得到 $Q$ 与 $\phi_0$ 成正比。记 $Q = C\phi_0$ ， $C$ 称为电容

$$C = -\epsilon_0 \int \nabla(\lambda\phi) \cdot d\vec{a} / \phi_0 \quad (10.16)$$

是一个由导体几何形状决定的常数。

现在考虑多个导体的情形。 $N$ 个导体分别记为1, 2, ...,  $N$ 。先让某一个导体的电势不为0，其余均为0： $(0, \dots, \phi_i, \dots, 0)$ 。这时导体上的电荷分别为 $(Q_1^{(i)}, Q_2^{(i)}, \dots, Q_N^{(i)})$ 。 $\phi^{(i)}(\vec{r})$ 为在导体上满足上述边界条件时的电势分布。 $\phi^{(i)}(\vec{r})$ 在第 $i$ 个导体上取值为 $\phi_i$ ，其它导体上取值为0。由唯一性定理， $\phi_i \rightarrow \lambda\phi_i$ 时， $\phi^{(i)}(\vec{r}) \rightarrow \lambda\phi^{(i)}(\vec{r})$ 。于是 $Q_j^{(i)} \rightarrow \lambda Q_j^{(i)}$ ，即 $Q_j^{(i)}$ 与 $\phi^{(i)}$ 成正比。记 $Q_j^{(i)} = C_{ji}\phi_i$ ，其中 $C_{ji} = -\epsilon_0 \int \nabla\phi^{(i)} \cdot d\vec{a}_j / \phi_i$ 为常数，称为电容系数。

下面再考虑一般的情况。导体上电势分别为 $\phi_1, \dots, \phi_N$ ，可以证明 $\phi(\vec{r}) = \sum_i \phi^{(i)}(\vec{r})$ 。这是因为在任意一个导体 $i$ 上， $\phi^{(i)}(\vec{r}) = \phi_i$ 满足所需边界条件。由唯一性定理可知 $\phi(\vec{r})$ 为解。这时，

$$Q_i = -\epsilon_0 \int \nabla\phi(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_i \quad (10.17)$$

$$= -\epsilon_0 \int \sum_j \nabla\phi^{(j)}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_i \quad (10.18)$$

$$= \sum_j (-\epsilon_0 \int \nabla\phi^{(j)}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_i) \quad (10.19)$$

$$= \sum_j C_{ij}\phi_j \quad (10.20)$$

即

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j \quad (10.21)$$

导体系统中电荷与电势存在如上的线性关系，并可以定义一系列电容系数。还可以证明  $C_{ij} = C_{ji}$ 。电容系数构成了一个对称矩阵。矩阵求逆后得到如下关系：

$$\phi_i = \sum_j P_{ij} Q_j \quad (10.22)$$

$P_{ij}$  称为电势系数。

导体系统的能量可以由如下方法得到

$$U_E = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum \phi_k \int_{S_k} dS \sigma_k = \frac{1}{2} \sum Q_k \phi_k \quad (10.23)$$

这个能量仅考虑了表面电荷的贡献，不包括导体的内能。

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \phi_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} P_{ij} Q_i Q_j \quad (10.24)$$

### 两导体电容器

两个导体带相反的电荷  $Q$  和  $-Q$ ，则电势分别为

$$\phi_1 = (P_{11} - P_{12})Q \quad (10.25)$$

$$\phi_2 = (P_{12} - P_{22})Q \quad (10.26)$$

电压降  $V = \phi_1 - \phi_2 = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})Q$ 。电容器的电容定义为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \quad (10.27)$$

对于电容，在频率不是很高时，仪器测量的电压降  $V$  仍然很好地满足  $V = \frac{Q}{C}$ ，而  $I = \frac{dQ}{dt}$ ，所以有  $I = C \frac{dV}{dt}$ 。

最后考虑电感。当一个电流回路中电流发生变化时，这个回路中会感应出电动势  $-\frac{d\Phi}{dt}$ 。一般地，这个电动势会阻碍电流的变化， $\Phi$  正比于回路中的电流。定义  $L = \Phi/I$ ，称为自感，那么  $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$ 。一个电路中的自感会改变其时间特征，如图。合上开关后，施加在电阻上的电动势是  $\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = IR$ 。在  $t = 0$  时合上开关，这一瞬间  $I = 0$ 。以此为初始条件，方程的解为  $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - \exp(-\frac{Rt}{L}))$ 。电路的时间常数是  $\frac{L}{R}$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时， $I \rightarrow \mathcal{E}_0/R$

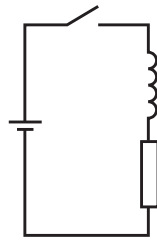


图 10.1:

两个电路间的一种耦合方式是互感。电路1在2中产生的磁通量是 $\Phi_{21} \propto I_1$ 。定义互感 $M_{21} = \Phi_{21}/I_1$ 。  $I_1$ 发生变化时， $\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$ ，可以证明 $M_{21} = M_{12}$ 。

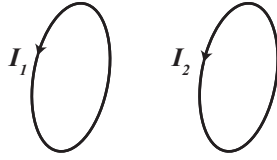


图 10.2: